

Skládání různoběžných kmitů

Uvědomme si principiální body tohoto problému : na jediný hmotný bod působí dvě nezávislé pružné síly ve dvou různých směrech. Jednotlivé mechanické pohyby, které se budou skládat, se tedy dějí na dvou různých přímkách, v nejjednodušším případě navzájem kolmých (viz dále). Pak je zcela zřejmé, že teoreticky jde o rozklad (zde skládání) obecného pohybu do jednoduchých pohybů na souřadných osách, který jsme probírali hned na začátku kinematiky hmotného bodu. Nevzniká samozřejmě prostorový pohyb, kmity na dvou osách vytvoří výsledný pohyb v rovině těchto přímek.

Skládání kolmých kmitů

Nejjednodušším případem je potom skládání kolmých kmitů, kdy můžeme využít existence kartézských os, například x a y . Rozlišíme dva základní případy :

1) harmonické kmity stejné frekvence :

Předpokládejme na osách x a y harmonické kmity stejné frekvence, avšak různé amplitudy a s různými fázovými konstantami :

$$x = x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = y(t) = B \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Uvědomíme si, že vlastně ihned dostáváme výsledné souřadnice polohového vektoru hmotného bodu a že to současně jsou parametrické rovnice dráhy hmotného bodu v rovině xy .

Složení dvou kolmých kmitů vzniká tedy rovinná křivka v omezené oblasti kolem rovnovážného bodu (počátku souřadnic), určené maximálními výchylkami hmotného bodu na osách x a y (tj. amplitudami A a B). Obecnou rovnici křivky v kartézských souřadnicích dostaneme vyločením parametru t následujícím způsobem :

Upravme formálně například první rovnici :

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2)$$

Nyní můžeme definovat veličinu, která popisuje fázový posun (rozdíl) kmitů na ose x oproti kmitům na ose y :

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

fázový rozdíl kmitů

Dosadíme zpět do první rovnice a použijeme součtový vzorec pro funkci sinus :

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_2 + \varphi) = A \cdot (\sin(\omega t + \varphi_2) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega t + \varphi_2) \cdot \sin \varphi)$$

Rovnici vydělíme amplitudou A a na pravé straně dosadíme z druhé rovnice :

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{B}\right)^2} \cdot \sin \varphi$$

Rovnici připravíme na umocnění :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{y}{B}\right)^2} \cdot \sin \varphi = \frac{x}{A} - \frac{y}{B} \cdot \cos \varphi$$

A provedeme :

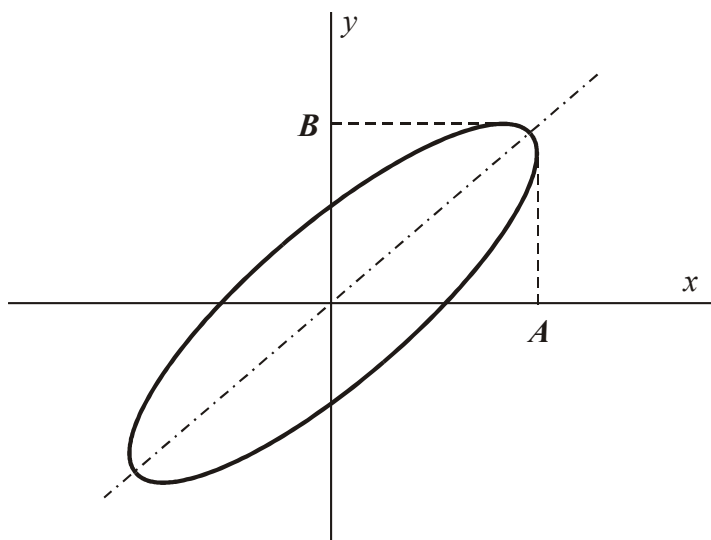
$$\left(1 - \left(\frac{y}{B}\right)^2\right) \cdot \sin^2 \varphi = \left(\frac{x}{A}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{A}\right) \cdot \left(\frac{y}{B}\right) \cdot \cos \varphi + \left(\frac{y}{B}\right)^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

Po spojení členů s kvadráty goniometrických funkcí a s využitím známého vztahu pro jejich součet dostaneme :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{A}\right) \cdot \left(\frac{y}{B}\right) \cdot \cos \varphi + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \sin^2 \varphi$$

výsledná dráha

Je to obecná rovnice elipsy ve středové poloze, kdy její střed je totožný se středem souřadnic, osa elipsy je však odkloněna o ostrý úhel vůči osám souřadnic (viz obr.).



Tvar elipsy závisí zejména na hodnotě fázového rozdílu φ , lze proto vyčlenit následující speciální případy :

a) Jestliže bude fázový rozdíl :

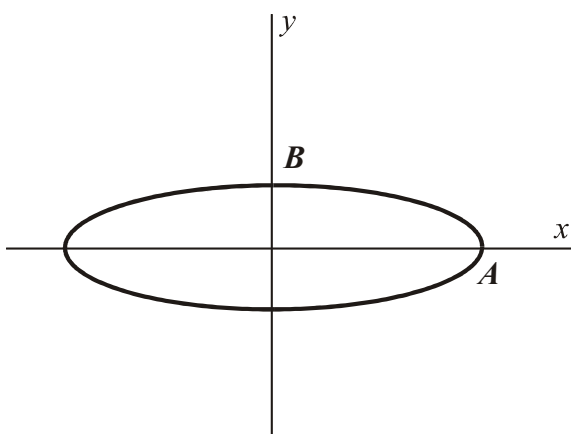
$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

(kde k je libovolné celé číslo, tj. kladné i záporné, včetně nuly)

Potom přejde obecná rovnice elipsy na tvar :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

To je rovnice elipsy v osové poloze, kdy osy elipsy splývají se souřadnými osami x a y (viz obr.):

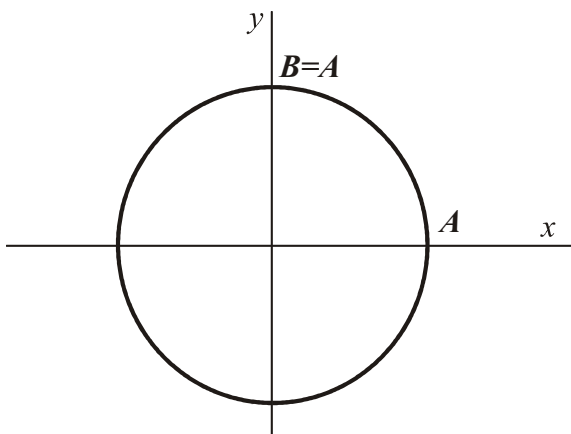


b) Jestliže bude navíc současně platit :

$$A = B$$

Potom dostaneme rovnici kružnice o poloměru A (B) :

$$x^2 + y^2 = A^2$$



c) Jestliže bude fázový rozdíl :

$$\varphi = k \cdot \pi$$

(kde k je opět libovolné celé číslo)

Potom se obecná rovnice elipsy změní na tvar (znaménko $+$ platí pro lichá čísla k) :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 \pm 2 \cdot \left(\frac{x}{A}\right) \cdot \left(\frac{y}{B}\right) + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

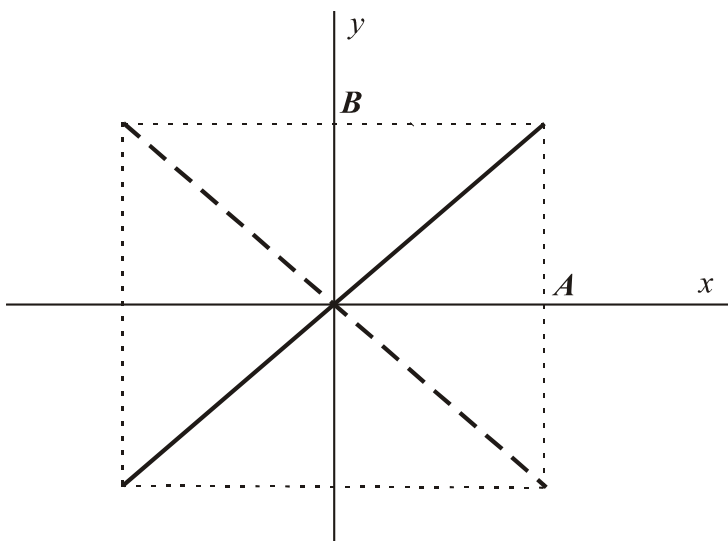
To lze upravit :

$$\left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

Po odmocnění a přesunu dostaneme (znaménko $+$ nyní platí pro sudá čísla k) :

$$y = \pm \frac{B}{A} \cdot x$$

To je rovnice přímky (přesněji řečeno úsečky , protože souřadnice na obou osách jsou omezeny amplitudami A a B), která prochází kvadranty I. a III. (pro sudé k), nebo kvadranty II. a IV. (pro liché k , viz obr.).



Změnu elipsy v přímku lze např. na obrazovce osciloskopu velmi dobře opticky detekovat, proto je tento stav základem dosti přesné metody určování nulového fázového rozdílu dvou kmitů (nebo rovného libovolnému násobku π).

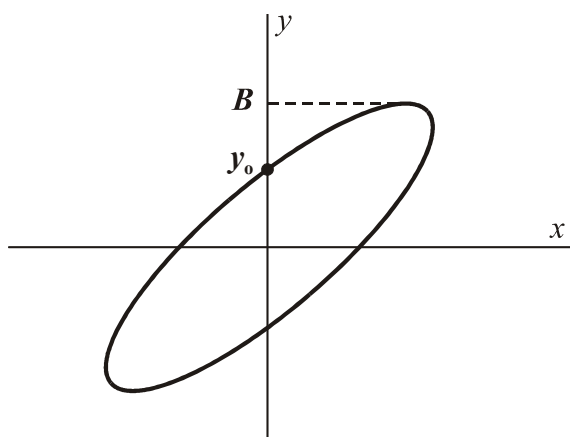
Ostatně, přesným odečtením souřadnic libovolného bodu obecné elipsy a amplitud lze určit jakýkoliv fázový rozdíl kmitů.

Např. pro souřadnice průsečíku elipsy s osou y , tj. pro bod $(x = 0, y = y_0)$ plyne z obecné rovnice jednoduchý vztah :

$$\left(\frac{y_0}{B}\right)^2 = \sin^2 \varphi$$

A fázový rozdíl lze tedy určit jako :

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{y_0}{B}\right)$$



2) harmonické kmity různé frekvence :

Skládání těchto kmitů představuje podobný problém jako u rovnoběžných kmitů - jejich výsledek nelze obecně popsat žádnou známou analytickou funkcí a nejeví obecně ani periodičnost.

Uvažme, co vlastně znamená tento pojem v našem případě, kdy skládání dvou jednorozměrných pohybů na osách vytváří nějakou dráhu v rovině těchto os. Periodičnost křivky v rovině, která popisuje polohu hmotného bodu, musí stejně jako u skalární funkce znamenat, že po určité době - periodě - dojde k opakování hodnot funkce - zde polohy hmotného bodu.

Výsledná dráha pohybu musí tedy být uzavřená křivka.

Podmínka periodičnosti – uzavřenosti – křivky dráhy vyjde potom zřejmě stejná jako u rovnoběžných kmitů :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

podmínka periodičnosti (uzavřené křivky)

Slovně: Úhlové frekvence, frekvence i periody výchozích kmitů musí být tedy **v poměru libovolných celých čísel**.

Vznikají tak, v elektrotechnice, velmi známé **Lissajousovy obrazce** (viz obr.). Nejjednodušším takovým obrazcem je vlastně elipsa z minulého odstavce, vznikající při skládání kmitů stejných frekvencí, tedy při poměru frekvencí $1:1$.

Poměr frekvencí se jednoznačně projevuje na počtu „vrcholů“ na bocích obrazců, lze tak s vysokou přesností stanovit celočíslný poměr frekvencí kmitů, které přivedeme na svislé a vodorovné vychylovací destičky osciloskopu.

Konkrétní tvar Lissajousova obrazce závisí také na fázovém rozdílu kmitů, je tedy teoreticky možné také jeho stanovení.

Jestliže fázový rozdíl kmitů nebude konstantní, ale bude například rovnoměrně růst, dojde na obrazovce osciloskopu k prostorovému efektu „otáčení“ obrazce (viz různé spořiče obrazovek).

