Vlnění pružného prostředí

Vznik vlnění a jeho popis

V minulých kapitolách jsme dosti podrobně probrali různé druhy kmitů jako speciální pohyb hmotného bodu. Ve světě kolem nás však většinou nekmitají jednotlivé hmotné body (a ani vlastně neexistují), ale kmitavé stavy pozorujeme u celých velkých <u>makroskopických těles</u> – <u>pevných, kapalných i plynných</u> – . a při popisu těchto pohybových stavů pak používáme pojem ***vlnění***.

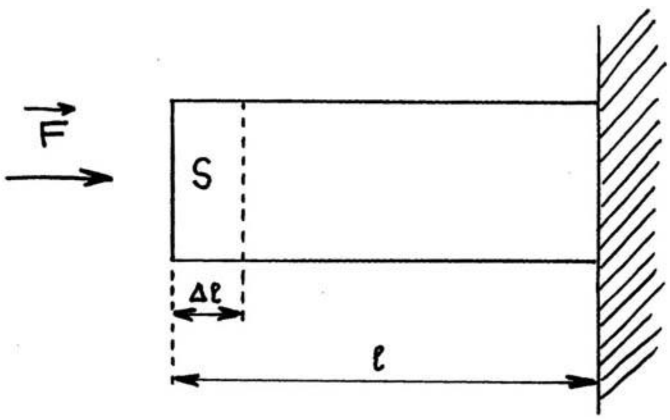
Všechna reálná tělesa jeví vždy určitou „míru" pružnosti - často se používá termín ***pružné hmotné prostředí***.

<u>Poznámka:</u> O pružnosti pevných látek nás přesvědčuje ***Hookeův zákon*** :

$$\sigma = E \cdot e$$

To je vztah přímé úměry mezi normálovým napětím (tlakem) a relativní deformací tělesa, tj. :

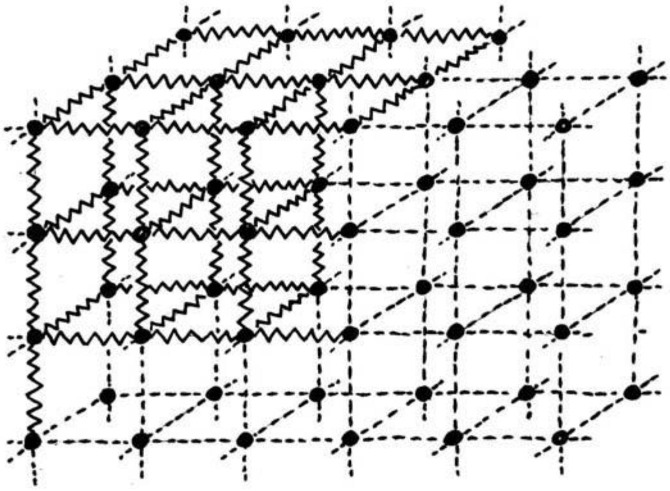
$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$



Protože deformace je vlastně výchylka nějakého hmotného bodu tělesa (viz obrázek - levý koncový bod tělesa) z rovnovážné polohy, znamená tato rovnice základní vztah pro <u>pružnou sílu</u> (skalárně, bez znaménka minus) :

$$F = \frac{E \cdot S}{l} \Delta l = konst. \cdot \Delta l$$

Fyzikálním modelem každého tělesa je soustava hmotných bodů a speciálně modelem pružného hmotného prostředí bude ***soustava pružně vázaných hmotných bodů*** , ve které mezi každými dvěma sousedními body působí pružná vazbová síla, která je úměrná jejich vzdálenosti (jakoby mezi těmito body byla natažena pomyslná pružina).



To ovġem znamená, ġe na kaġdý hmotný bod pŢsobí nĲaká výslednice pruġných sil, jde tedy o ***<u>soustavu pruġnĲ vázaných (lineárních harmonických) oscilátorŢ</u>*** .

V <u>rovnováġném</u>, klidovém stavu je jistĲ souļet vġech pruġných sil na libovolný hmotný bod roven nule. Kdyġ ovġem <u>vychýlíme</u> tento bod z rovnováġné polohy (a on pak vlastnĲ zaļne kmitat), poruġíme rovnováhu sil nejen u vychýleného bodu, ale i u bodŢ <u>sousedních</u> ï ty se tedy zaļnou také pohybovat ï a tak vyvolávají pohyb dalġích svých sousedŢ é ..
é . poļáteļní výchylka (kmity, <u>rozruch</u>) se tak ĂġíŚíñ na vġechny strany é . aġ po nĲakém ļase budou kmitat vġechny body soustavy.

Pojem vlnĲní oznaļuje kmitání celé soustavy pruġnĲ vázaných hmotných bodŢ.

Fyzikální popis vlnĲní tedy musí obsahovat matematický vztah pro kmity kaġdého bodu soustavy. Uvaġme pŚedevġím, ġe výchylka konkrétního hmotného bodu z jeho rovnováġné polohy mŢġe mít obecnĲ v prostoru zcela libovolný smĲr ï oznaļíme ji tedy jako <u>vektor</u> ï a bude jistĲ záviset na <u>poloze</u> hmotného bodu a bude se také mĲnit s <u>ļasem</u> :

$$\boxed{\vec{u} \;=\; \vec{u}(\vec{r},t) \;=\; \vec{u}(x,y,z,t)}$$

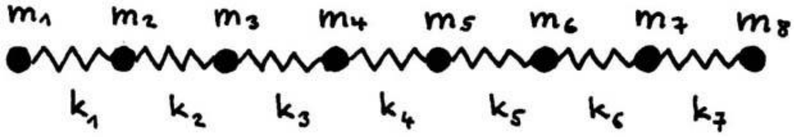
<u>obecná rovnice vlnĲní</u>

Obecné vlnĲní v prostoru tedy musí být popsáno <u>vektorovou funkcí ļtyŚ promĲnných</u>. Ve speciálním, jednoduġġím pŚípadĲ mŢġe ovġem existovat <u>dvourozmĲrné vlnĲní</u> (na ploġe) :

$$\vec{u} \;=\; \vec{u}(x,y,t)$$

A matematicky nejjednoduġġí tvar bude jistĲ mít vlnĲní ***<u>bodové Śady</u>*** (viz obrázek, kterou lze dobŚe realizovat jako strunu, tyļ, vzduchový sloupec é) :

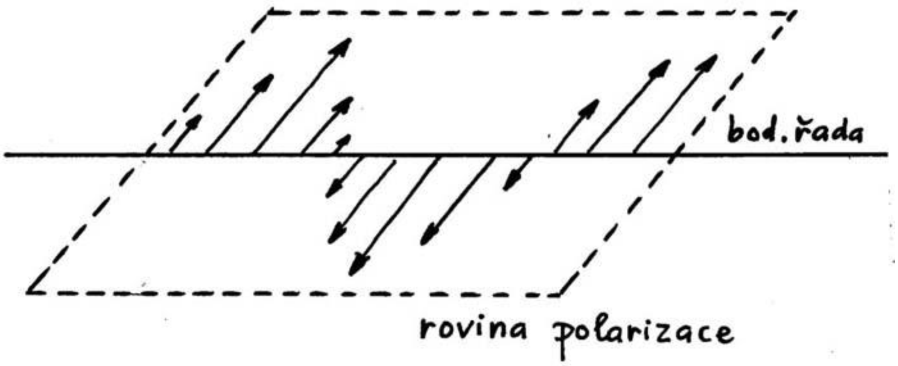
$$\vec{u} \;=\; \vec{u}(x,t)$$



Tento zápis lze jeġtĲ dále zjednoduġit v pŚípadĲ ***<u>lineárnĲ polarizovaného vlnĲní</u>*** , kdy jsou výchylky vġech hmotných bodŢ navzájem <u>rovnobĲġné</u>. Vektory výchylek tedy leġí stále v jedné rovinĲ (tzv. ***<u>rovina</u>***

polarizace), mají v prostoru stále <u>stejný směr</u>, a jestliže známe tento směr, můžeme pak určovat jen velikost výchylky, tj. skalár :

$\boxed{u = u(x,t)}$ ***<u>lineárně polarizovaného vlnění</u>*** (nejjednodušší tvar rovnice vlnění)



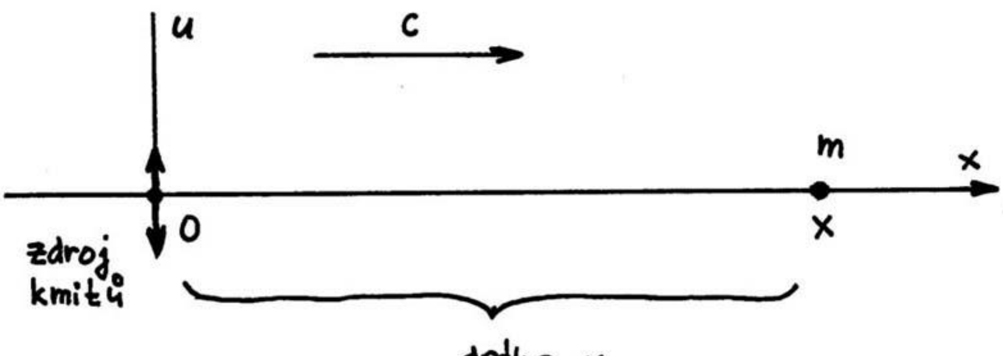
<u>Ze střední školy už vlastně znáte dva druhy lineárně polarizovaného vlnění</u> :

- příčné vlnění (kmity jsou kolmé k bodové řadě)
- podélné vlnění (kmity jsou rovnoběžné s bodovou řadou)

Sestavme nyní rovnici vlnění pro tento nejjednodušší případ lineárně polarizovaného a harmonického vlnění bodové řady:

Bodovou řadu ztotožníme s osou x a budeme předpokládat, že výše zmíněný počáteční <u>rozruch</u> nastane v bodě 0 této osy jako důsledek působení nějakého ***<u>zdroje kmitů</u>***. Předpokládejme dále, že tento zdroj bude pohybovat s bodem 0 nejjednoduššími <u>harmonickými</u> kmity :

$\boxed{u_0 = A \cdot \sin \omega t}$ ***<u>kmity zdroje</u>***



Pružnými vazbami (mezi jednotlivými hmotnými body) se <u>postupně uvádějí do pohybu</u> (rozkmitávají se) sousední body - říkáme, že rozruch (harmonické kmity) se šíří (postupuje) od zdroje po ose x nějakou rychlostí c é é . vzniká tak ***<u>postupné vlnění v bodové řadě</u>***.

Sledujme jeho šíření v kladném směru osy x a položme si otázku, jaká bude výchylka libovolného hmotného bodu m v místě o souřadnici x :
Tento bod ovšem nezačne kmitat současně se zapnutím zdroje, ale s časovým zpožděním – až po uplynutí určité doby, za kterou se kmity (rozruch) dostanou do daného místa.

K určení této doby musíme znát již zmíněnou rychlost šíření rozruchu c – je to rychlost šíření určité výchylky, která je dána určitou velikostí fáze kmitů – můžeme ji tedy označit jako rychlost postupu místa stejné fáze – tzv. ***fázová rychlost*** vlnění.

Potom bude časové zpoždění kmitů v místě x dáno proběhnutou drahou (délky x) a konstantní fázovou rychlostí podle vztahu (pro rovnoměrný pohyb) :

$$\boxed{t' = \frac{x}{c}}$$

časové zpoždění kmitů

Až po uplynutí této doby nastane v místě x stejná výchylka jako v počátku, ale ve zpožděném (posunutém) čase :

$$u = u(x,t) = A \cdot sin\, \omega (t - t')$$

Po dosazení za časové zpoždění vznikne ***základní matematický zápis postupného harmonického lineárně polarizovaného vlnění v bodové řadě*** (postupujícího v kladném směru osy x) :

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin\, \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)}$$

A po roznásobení dostaneme další používaný tvar :

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin \left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{c} \right)}$$

Proveďme podrobnější rozbor rovnice vlnění jako funkce dvou proměnných :

1) Pro ***x = konst.***

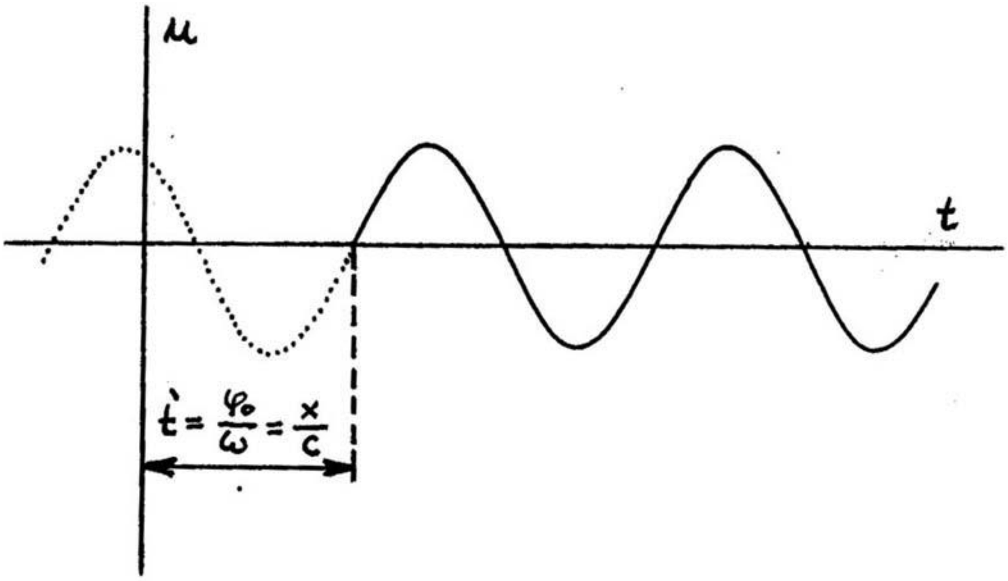
tato rovnice vyjadřuje harmonické kmity hmotného bodu v místě x – tak byla rovnice vlnění vlastně vytvořena. Pro toto zadané místo je celý druhý člen v závorce konstantní a vytváří vlastně fázovou konstantu kmitů :

$$u(x,t) = A \cdot sin \left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{c} \right) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = u(t)$$

Vidíme, že fázová konstanta je záporná :

$$\varphi_0 = - \frac{\omega \cdot x}{c}$$

To nám jasně potvrzuje, že kmity v místě x jsou skutečně zpožděné oproti kmitům zdroje v počátku osy x (viz obr.) :



Z obrázku je vidět, že „počátek“ sinusovky je posunutý (opožděný) o čas $t´$, pro který platí (je to nulový bod funkce sinus) :

$$\omega \cdot t' - \frac{\omega \cdot x}{c} \; = \; 0$$

Vypočítáme-li z rovnice tento čas, můžeme spokojeně konstatovat, že je právě roven časovému zpoždění kmitů v místě x - což byl také náš výchozí předpoklad při sestavení rovnice kmitů :

$$t' \; = \; \frac{x}{c} \; = \; -\frac{\varphi_0}{\omega}$$

<u>Rovnice vlnění tedy popisuje výchylku hmotných bodů v libovolném místě</u> – jsou to (harmonické) kmity stejné frekvence a amplitudy jako kmity v počátku osy x, ale fázově zpožděné v důsledku časového zpoždění při postupu vlnění (fázovou rychlostí c).

<u>Není vlastně ani principiálně důležité</u> , aby v počátku osy x (v bodě 0) byl zdroj kmitů – může být kdekoliv jinde (vlevo na ose x), důležitý je <u>směr postupu</u> vlnění – zleva doprava, (v kladném směru osy x) – který vytváří ono fázové zpoždění kmitů v místě x <u>oproti bodu 0</u> (obecněji – oproti bodu vzdálenému o x).

Pak je také zřejmé, že v případě <u>opačného postupu vlnění</u> (se zdrojem někde daleko v pravé části osy x) budou kmity v místě x naopak <u>předbíhat kmity</u> v bodě 0 – druhý člen v argumentu sinu musí proto změnit znaménko :

$$\boxed{u(x,t) \; = \; A \cdot sin\left(\omega \cdot t + \frac{\omega \cdot x}{c} \right)}$$

<u>vlnění postupující v záporném směru osy x</u>

2) Pro ***<u>t = konst.</u>***

bude rovnice vlnění ukazovat <u>výchylky všech hmotných bodů v jednom daném čase</u>, bude to tedy jakási „fotografie“ vlnění v tomto čase, která nám ukáže <u>prostorové rozložení</u> našeho vlnění.

Pro daný čas t je nyní v závorce konstantní první člen (označíme ho jiným písmenem, neboť to není standardní fázová konstanta časových kmitů) :

$$u(x,t) = A\cdot sin\left(\omega\cdot t - \frac{\omega\cdot x}{c}\right) = A\cdot sin\left(\alpha - \frac{\omega\cdot x}{c}\right) = u(x)$$

Budu doufat, že laskavý čtenář správně matematicky zhodnotí tento výraz a konstatuje, že jde opět o obecnou sinusovku, ale nyní s proměnnou x.

<u>Periodu</u> této sinusovky označíme λ (bude to vzdálenost mezi místy stejné fáze vlnění, tzv. ***<u>vlnová délka</u>***) a stanovíme ji z obecné definice periody funkce jako (nejmenšího) intervalu proměnné, po kterém se vždy opakuje hodnota (průběh) funkce :

$$u(x) = u(x+\lambda)$$

Máme tedy :

$$A\cdot sin\left(\alpha - \frac{\omega\cdot x}{c}\right) = A\cdot sin\left(\alpha - \frac{\omega\cdot(x+\lambda)}{c}\right)$$

Hodnoty funkce sinus se opakují s periodou 2π, tj. rozdíl obou argumentů (v závorkách) se musí rovnat této periodě:

$$\left(\alpha - \frac{\omega\cdot x}{c}\right) - \left(\alpha - \frac{\omega\cdot(x+\lambda)}{c}\right) = 2\pi$$

Po úpravě:

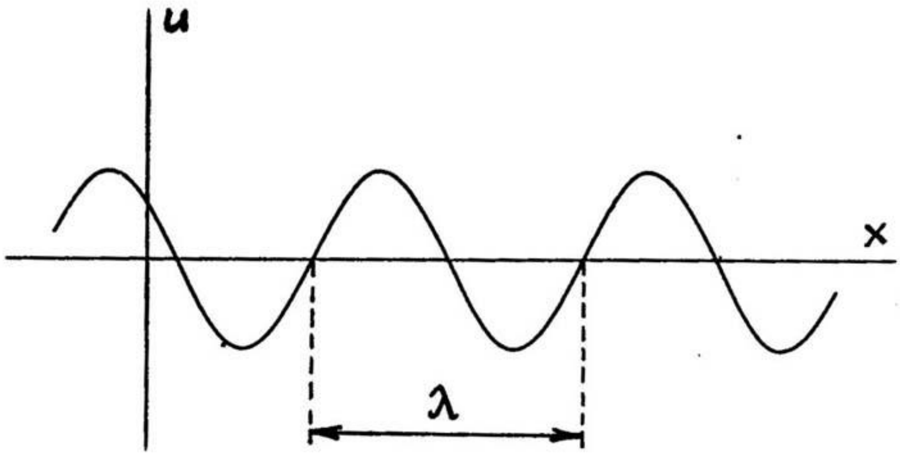
$$\frac{\omega\cdot\lambda}{c} = 2\pi$$

A s využitím znalostí o úhlové frekvenci můžeme stanovit vztahy pro vlnovou délku :

$$\boxed{\lambda = \frac{2\cdot\pi\cdot c}{\omega} = \frac{2\pi\cdot c}{2\pi\cdot f} = \frac{c}{f} = c\cdot T}$$

<u>vlnová délka</u>

Vlnová délka je perioda „prostorové“ části rovnice vlnění, je to <u>vzdálenost míst stejné fáze</u> kmitů. Z posledního výrazu pak můžeme vidět <u>další fyzikální smysl</u> této veličiny – je to <u>dráha</u> (vzdálenost), kterou proběhne vlnění <u>za dobu periody T</u>
(za kterou se uskuteční právě jeden celý kmit a na proběhnuté dráze se tedy rozloží právě jedna kompletní vlna).



Někdy se také používá veličina :

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$$ ***<u>vlnočet</u>***

jako podíl jednotkové délky a délky jedné vlny – můžeme ji tedy také chápat jako <u>počet vln na jednotkové vzdálenosti</u>.

Vraťme se nyní k poslednímu tvaru naší rovnice vlnění :

$$u(x,t) = A \cdot sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{c}\right)$$

A provedeme poslední formální úpravu – podíl úhlové frekvence a fázové rychlosti označíme jako novou konstantu :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot \sigma}$$ ***<u>úhlový vlnočet</u>***

Název této veličiny vyplývá z její velikosti, rovné 2π-násobku obyčejného vlnočtu.

Vznikl tak nejznámější, formálně <u>nejjednodušší tvar</u> rovnice postupného harmonického vlnění v bodové řadě:

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

Na závěr tohoto odstavce můžeme posoudit různé varianty rovnice vlnění, např. jak by se změnila v případě, že by kmity zdroje obsahovaly nějakou nenulovou <u>fázovou konstantu</u> :

$$u_0 = A\cdot sin(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Pak by se zřejmě tato konstanta beze změny „přenesla" do kmitů v dalších místech bodové řady :

$$\boxed{u(x,t) = A\cdot sin(\omega\cdot t-k\cdot x+\varphi_0)}$$

Nezapomeňte také na úvahy při rozboru rovnice vlnění, že v případě opačného postupu vlnění (v záporném směru osy x) nastane změna znaménka u prostorové části argumentu :

$$\boxed{u(x,t) = A\cdot sin(\omega\cdot t+k\cdot x)}$$

Protože rovnice vlnění je v podstatě rovnicí kmitů, lze pro ni psát analogický komplexní zápis jako pro kmity :

$$\boxed{\tilde{u}(x,t) = A\cdot e^{\pm i\cdot(\omega\cdot t\,\pm\,k\cdot x\,+\,\varphi_0)}}$$

komplexní tvar vlnění

Poslední úvaha o variantách rovnice vlnění by se týkala možnosti, že kmity zdroje by nebyly harmonické, ale měly by zcela obecný průběh (i neperiodický), popsaný nějakou libovolnou funkcí času :

$$u_0 = f(t)$$

Pak by samozřejmě v bodové řadě vzniklo také neharmonické postupné vlnění, které by popisovala stejná funkce f s argumentem, který by vyjadřoval časové zpožďování nebo předbíhání kmitů v místě x oproti místu 0 :

$$\boxed{u(x,t) = f\left(t\pm\frac{x}{c}\right)}$$

neharmonické postupné vlnění

Vlnění v prostoru

Umístíme-li zdroj kmitů v nějakém místě 3-rozměrného pružného hmotného prostředí, pak se ovšem vzniklý rozruch šíří pomocí pružných vazeb částic na všechny sousední body , tj. do všech směrů v prostoru, do všech bodů tohoto prostředí.

Místa, do nichž se vlnění rozšíří v různých směrech za tutéž dobu, leží jistě na nějaké spojité ploše – tzv. ***vlnoplocha*** . Výchylky (kmity) všech bodů na vlnoploše jsou stejně časově (tedy i fázově) zpožděné oproti místu zdroje, mají tedy stejnou velikost i stejnou fázi.

Vlnoplocha je geometrické místo kmitů stejné fáze

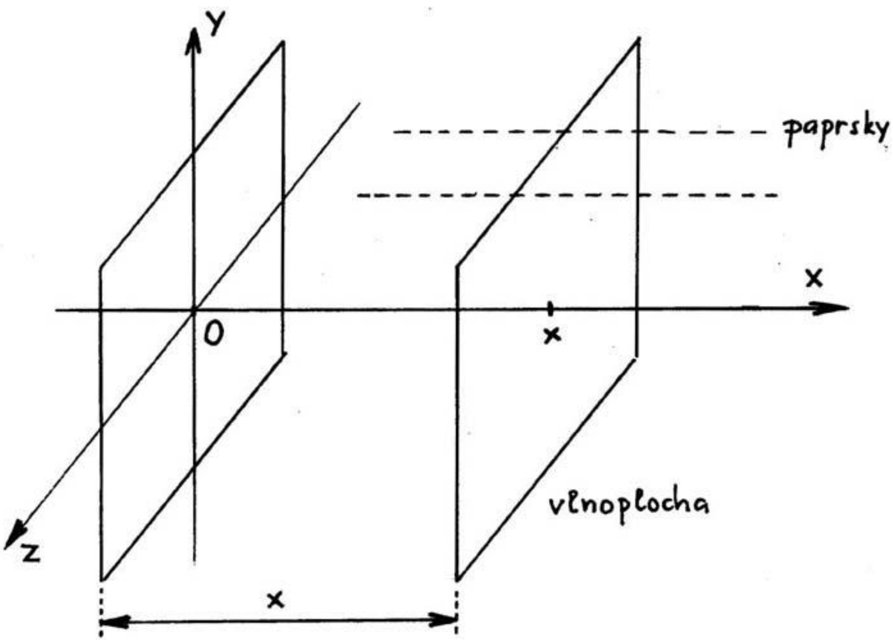
Poznámka: Vlnoplochy existují v každém čase, je jich tedy nekonečně mnoho, zakreslujeme však jen některé, např. takové, které jsou od sebe vzdáleny o vlnovou délku.

Při popisu vlnění také užíváme pojem ***paprsek*** – rozumíme tím přímku, která leží ve směru postupu vlnění v daném místě. Paprsky jsou kolmé k vlnoplochám, jsou to vlastně jednoduché bodové řady.

Vlnoplochy mají obecně libovolný tvar. Je-li však hmotné prostředí ***izotropní*** – tj. vlnění se šíří ve všech směrech (od zdroje) stejnou fázovou rychlostí – pak vznikají ***kulové vlnoplochy*** – a vlny (vlnění) také nazýváme kulové - jde vlastně o nejčastější tvar vlnoploch v přírodě.

Uvažme dále, že ve velké vzdálenosti od zdroje mají kulové vlnoplochy velký poloměr – v menší objemové části prostředí je tedy lze považovat za ***rovinné vlnoplochy***. To platí tím přesněji, čím menší část objemu sledujeme a v limitě pro nekonečně malou (diferenciální) část prostoru můžeme vlastně jakékoliv vlnoplochy považovat za rovinné. Rovinné vlnění (vlny) se tak stává teoreticky nejdůležitějším druhem vlnění.
Odvodíme proto rovnici tohoto vlnění.

Představme si nejjednodušší situaci, že rovinné vlnění postupuje ve směru osy x . Tato osa je tedy jedním z jeho paprsků a rovinné vlnoplochy jsou k ní kolmé. Do obrázku zakreslíme pouze dvě vlnoplochy – jednu jdoucí počátkem 0 (je to vlastně roviny yz) a druhou ve vzdálenosti x od počátku :



Víme, že na vlnoplochách mají všechny body stejnou výchylku, kmitají se stejnou fází. Na první vlnoploše jdoucí počátkem 0 mají tedy všechny hmotné body stejnou fázi jako v bodě 0 a všechny body na druhé vlnoploše mají stejnou fázi jako bod na ose x, tj. stejné fázové zpoždění jako tento bod.
Situace na celé této vlnoploše je tedy stejná jako v místě x na bodové řadě (na ose x, i na jakémkoliv paprsku). Potom rovnice vlnění v bodové řadě, která popisuje kmity v libovolných místech osy x, je také současně rovnicí pro vlnoplochy jdoucí těmito místy a je tedy nejjednodušší rovnicí prostorového vlnění, rovnicí postupného rovinného vlnění (lineárně polarizovaného), jdoucího ve směru osy x :

$$\boxed{u(x,y,z,t) \;=\; u(x,t) \;=\; A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)}$$ ***rovinná vlna ve směru osy x***

Poznámka : Rovinnou postupnou vlnu také samozřejmě popisují všechny obecnější tvary, které jsme doplnili u bodové řady – tj. s přídavnou fázovou konstantou, změna znaménka při opačném postupu vlnění, komplexní tvar, neharmonické vlnění.

<u>Vlnová rovnice</u>

Rovnice jakéhokoliv vlnění je principiálně vždy rovnicí popisující pohyb hmotných bodů (dané látky, soustavy) a je ji tedy možno nalézt řešením Newtonových pohybových rovnic. Sestavení těchto rovnic však jistě není jednoduchá záležitost. Pružné hmotné prostředí, které je předpokladem pro existenci vlnění, je speciální soustavou hmotných bodů, která se pohybuje „nestandardním“ způsobem – <u>vlnění jistě nelze vyjádřit pomocí translace a rotace a použít impulzových vět</u>, protože tyto věty neobsahují vnitřní vazební síly, které jsou pro vznik a existenci vlnění zásadně důležité. Exaktní stanovení pružných vazbových sil je pak velmi komplikované, neboť tyto síly závisejí na struktuře látky a vlastnostech jejích částic.

Je proto velmi výhodné, že se podařilo nalézt „<u>ekvivalentní pohybovou rovnici</u>“, která neobsahuje materiálové a strukturní parametry pružného prostředí – tzv. ***<u>vlnovou rovnici</u>***.

Provedeme odvození této rovnice pro základní druh vlnění - rovinné vlny postupující ve směru osy x :

$$u(x,t) \;=\; A\cdot sin(\omega\cdot t-k\cdot x)$$

Proveďme nejprve dvakrát derivaci (parciální) podle času :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\cdot\omega\cdot cos(\omega\cdot t-k\cdot x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\cdot\omega^2\cdot sin(\omega\cdot t-k\cdot x)$$

A potom dvakrát derivaci podle souřadnice :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\cdot(-k)\cdot\cos(\omega\cdot t-k\cdot x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\cdot(-k)^2\cdot\sin(\omega\cdot t-k\cdot x)$$

Ze druhé časové derivace vyjádříme funkci sinus :

$$sin(\omega\cdot t-k\cdot x) \;=\; -\frac{1}{A\cdot\omega^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

a dosadíme do posledního vztahu pro druhou prostorovou derivaci :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; -A\cdot(-k)^2\cdot\frac{-1}{A\cdot\omega^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; \frac{k^2}{\omega^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Jestliže použijeme definiční vztah pro úhlový vlnočet :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

dostaneme po vykrácení :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

vlnová rovnice (nejjednodušší tvar)

Tato rovnice je skutečně ekvivalentní k pohybové rovnici, neboť na její jedné (pravé) straně vystupuje druhá derivace výchylky podle času, tj. zrychlení kmitající částice (elementu) hmoty, působící síly se však podařilo vyjádřit druhou parciální derivací podle souřadnice a fázovou rychlostí vlnění (ta jediná závisí na vlastnostech prostředí).

Rovnice vlnění je pak řešením vlnové rovnice. Je velmi pozoruhodné, že vlnovou rovnici splňuje i postupné neharmonické vlnění libovolného tvaru (zkuste sami dosazení) :

$$u = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

Bez odvozování si uvedeme, že vlnová rovnice ještě může být dále zobecněna pro lineárně polarizované postupné vlnění v libovolném směru – pak se na levé straně objeví další parciální derivace podle y a z :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Levou stranu je možno formálně zjednodušit využitím Laplaceova operátoru :

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

Pak dostaneme :

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

A v nejobecnějším případě ***nepolarizovaného vlnění***, kdy výchylky hmotných bodů je nutno vyjádřit jako vektory, se vlnová rovnice stane rovnicí vektorovou :

$$\boxed{\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}$$

vlnová rovnice (obecný tvar)

Matematicky jde o parciální diferenciální rovnici 2.řádu. Zásadně důležité pak je, že i když byla tato rovnice odvozena pro rovinné vlny, platí pro jakékoliv vlnění, neboť jako každá rovnice s diferenciály platí jen pro diferenciální – nekonečně malou – část prostoru, pro dané (prakticky bodové) místo, kdy lze jakoukoliv vlnoplochu považovat za rovinnou.

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, zkráceno 02/2016**