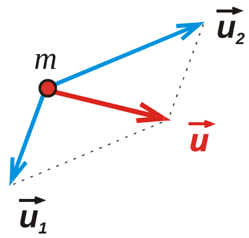
Skládání (interference) vlnění

Protože vlnění je ve své podstatě kmitání (soustavy) hmotných bodů, nemůže nás překvapit, že existuje jev ***skládání vlnění*** od (několika) různých zdrojů - který neznamená nic jiného, než že v každém bodě soustavy se skládají kmity vyvolané těmito zdroji,

Podle ***principu superpozice*** mechanických pohybů se například dvě okamžité výchylky hmotného bodu v daném místě od dvou vlnění (tyto výchylky jsou určeny rovnicemi vlnění) sečtou – v nejobecnějším případě **vektorově** - do výsledné výchylky hmotného bodu - a tím vytvoří rovnici výsledného vlnění :

$$\boxed{\vec{u}(x,y,z,t) = \vec{u}_1(x,y,z,t) + \vec{u}_2(x,y,z,t)}$$



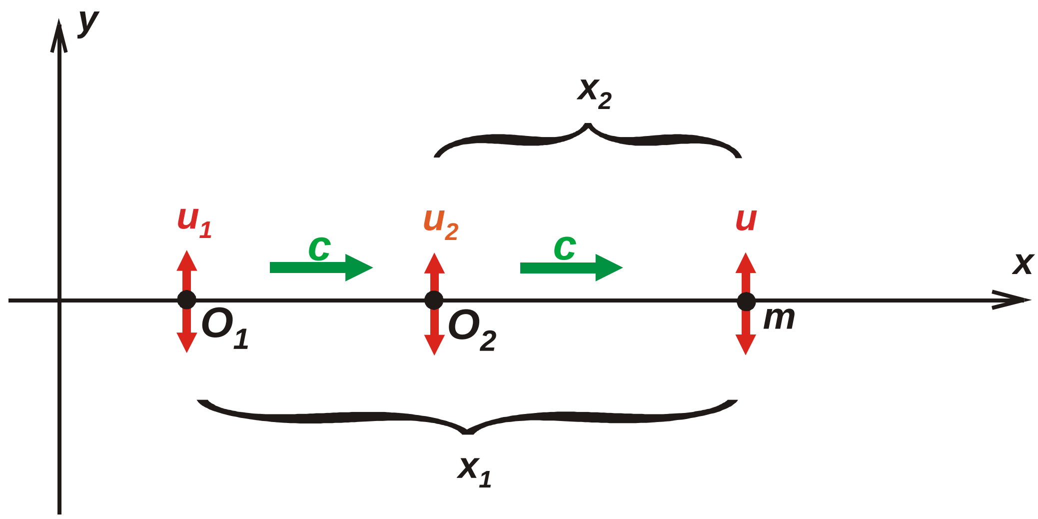
Je zřejmé, že i jen z důvodu obecných směrů vektorů výchylek můžeme dostat při jejich sčítání dosti komplikované výsledky .

Nejjednodušší bude jistě interference dvou ***stejně lineárně polarizovaných*** ***rovinných vln stejné vlnové délky***. Pak totiž sčítáme pouze skaláry, a protože rovinné vlny se popisují stejnými rovnicemi jako bodové řady, můžeme tento problém převést na interferenci vlnění v bodové řadě.

1) Uvažme nejprve, že obě vlnění ***postupují ve stejném směru*** osy x :

Předpokládejme, že v bodové řadě existují na dvou místech (O_1 a O_2) dva zdroje vlnění, které kmitají se stejnou periodou, mají stejný směr kmitání a stejné fáze (nebo alespoň konstantní fázový rozdíl) – to jsou tzv. ***koherentní zdroje*** :

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_1(O_1) = A_1 \cdot \sin \omega t & \\ u_2(O_2) = A_2 \cdot \sin \omega t & \quad \textit{nebo} \quad u_2 = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o) \end{array}}$$



V kladném směru osy x se potom šíří dvě stejně lineárně polarizovaná vlnění stejné vlnové délky. Fázová zpoždění obou vlnění v libovolném bodě m , daná proběhnutými drahami obou vlnění (x_1 , x_2), pak určují rovnice obou vlnění, tj. okamžité výchylky v tomto bodě :

$$u_1(x,t) = A_1 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_1)$$
$$u_2(x,t) = A_2 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

Výsledná výchylka bodu m je pak jejich jednoduchým skalárním součtem :

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = A_1 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_1) + A_2 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

Ve sledovaném bodě m, tj. pro zadané hodnoty x_1 a x_2 tato rovnice znamená „obyčejné“ skládání ***dvou rovnoběžných kmitů stejné frekvence*** s různými amplitudami (A_1, A_1) a s různými fázovými konstantami :

$$\varphi_1 = -k \cdot x_1$$
$$\varphi_2 = -k \cdot x_2$$

A můžeme tak v plné míře aplikovat naše dřívější poznatky o skládání rovnoběžných kmitů :

Výsledné kmity (vlnění) jsou opět harmonické, stejné frekvence (vlnové délky). s ***výslednou amplitudou*** a ***fázovou konstantou*** , které se určí např. grafickou metodou pomocí komplexních amplitud. Velmi často zajímají fyziky i techniky - stejně jako při skládání kmitů - extrémní výsledky :

a) Víme, že pro ***maximum interference*** platí podmínka na fázový rozdíl kmitů :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm n \cdot 2\pi \quad , \quad n = 0,1,2...$$

Jestliže dosadíme za fázové konstanty a úhlový vlnočet :

$$-k \cdot x_1 - (-k \cdot x_2) = \pm n \cdot 2\pi$$
$$k \cdot (x_2 - x_1) = \pm n \cdot 2\pi$$
$$\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1) = \pm n \cdot 2\pi$$

Pak po vynásobení vlnovou délkou (a vykrácení) dostaneme :

$$x_2 - x_1 \; = \; \pm n \cdot \lambda$$

nebo :

$$\boxed{|x_1 - x_2| \; = \; n \cdot \lambda \; = \; 2n \cdot \frac{\lambda}{2}}$$

podmínka maxima interference

Výraz na levé straně je rozdíl vykonaných drah – ***dráhový rozdíl vlnění*** – a pro dosažení maximální výchylky (rovné součtu obou amplitud) musí být roven *celočíselnému násobku vlnové délky* (sudému násobku poloviny vlnové délky) - *vlny jsou pak „ve fázi“*.

b) Pro ***interferenční minimum*** pak z obecné podmínky na fázový rozdíl kmitů platí :

$$\varphi_1 - \varphi_2 \; = \; \pm (2n+1) \cdot \pi \quad , \quad n = 0,1,2 \ldots$$

Dostaneme analogicky :

$$\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1) \; = \; \pm (2n+1) \cdot \pi$$

a nakonec :

$$\boxed{|x_1 - x_2| \; = \; (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}}$$

podmínka minima interference

Dráhový rozdíl vlnění se tedy v případě minima musí rovnat lichému násobku poloviny vlnové délky – *vlny jsou pak „v protifázi“..*

2) Předpokládejme další možnou situaci - že dvě rovinné vlny (stejně lineárně polarizované a stejné vlnové délky) ***postupují navzájem opačnými směry*** , například opět na ose x .

Tato možnost připadá v úvahu v prostoru mezi dvěma koherentními zdroji , velmi často se však realizuje po odrazu postupného vlnění od jediného zdroje na nějaké překážce (rozhranní dvou prostředí). Předpokládejme ještě pro maximální jednoduchost příčné vlnění – tj. výchylky v ose y , nulové fázové konstanty a stejné amplitudy :

$$y_1(x,t) \; = \; A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$
$$y_2(x,t) \; = \; A \cdot sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Výsledná výchylka libovolného bodu v místě x je pak jejich skalárním součtem :

$$y(x,t) \; = \; y_1(x,t) + y_2(x,t) \; = \; A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + A \cdot sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Stejné amplitudy můžeme lehce vytknout :

$$y(x,t) \;=\; y_1(x,t) + y_2(x,t) \;=\; A\cdot\left(\sin(\omega\cdot t - k\cdot x) + \sin(\omega\cdot t + k\cdot x)\right)$$

A použijeme známý součtový vzorec :

$$y(x,t) \;=\; 2\,A\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos(k\cdot x)$$

Tato rovnice je opět rovnicí nějakého vlnění (v bodové řadě, či rovinného), neboť popisuje kmitavý stav (výchylku) libovolného bodu v libovolném čase, rozhodně se ovšem nejedná o postupné vlnění (není to funkce zpožděného času) – jsou to tzv. stojaté vlny :

$$\boxed{y \;=\; 2\,A\cdot\cos k\,x\cdot\sin\omega t}$$

<u>stojaté vlnění</u>

U postupného vlnění totiž kmitají všechny body se <u>stejnou amplitudou</u> - ale s odlišnou fází (která se v prostoru šíří fázovou rychlostí).

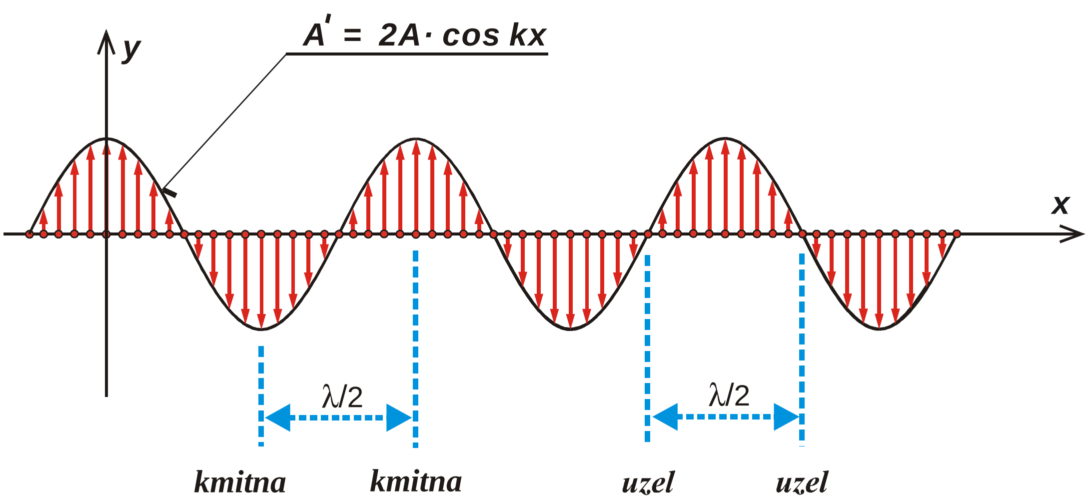
Ze získaného vztahu však jasně vidíme, že v případě tohoto stojatého vlnění kmitají <u>všechny body</u> se <u>stejnou fází</u> - ale amplitudy jejich kmitů jdou různé :

$$\boxed{A' \;=\; 2\,A\cdot\cos k\,x}$$

<u>amplituda stojatého vlnění</u>

<u>Pozn. :</u> podle této definice je tedy amplituda veličina kladná i záporná, na rozdíl od harmonických kmitů hmotného bodu, kdy je amplituda chápána jako kladné číslo – nepřináší to však žádné matematické potíže – stále jde o maximální výchylku hmotného bodu, v kladném nebo záporné směru.

Prakticky to znamená, že všechny hmotné body v bodové řadě se <u>například v počátečním</u> čase začínají <u>současně vychylovat ze svých klidových hodnot</u> – a za stejnou dobu (rovnou čtvrtině periody kmitu) všechny současně dosáhnou svých maximálních hodnot – tj. amplitudy A' (viz obrázek níže).



Obrázek nám dobře ukazuje prostorové rozložení kmitů na bodové řadě. Vidíme také, že matematicky nijak nevadí, když je amplituda na některých místech záporná – znamená to pouze, že hmotné body se pohybují v opačném smyslu, než hmotné body v místech kladné amplitudy (přesně vzato jsou tedy jejich kmity v protifázi).

Výchylky kmitů (amplituda) je největší v místech, která se nazývají kmitny. Platí pro ně :

$$\cos kx = \pm 1$$

Tedy v místech, kde je :

$$kx = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

Jestliže pro úhlový vlnočet použijeme známý vztah :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

Dostaneme pro polohu kmiten jednoduchou podmínku :

$$\boxed{x = 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\frac{2\lambda}{2}, \pm\frac{3\lambda}{2}, \ldots}$$

kmitny stojatého vlnění

Vzdálenost každých dvou sousedních kmiten je tedy rovna polovině vlnové délky. Jak vidíme z obrázku, mezi kmitnami jsou místa – tzv. uzly - ve kterých jsou hmotné body trvale v klidu, tj. mají nulovou výchylku :

$$\cos kx = 0$$

Tedy v místech, kde je :

$$kx = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Jestliže opět pro úhlový vlnočet použijeme známý vztah :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Dostaneme pro polohu uzlů jednoduchou podmínku :

$$\boxed{x = 0, \pm\frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3\lambda}{4}, \pm\frac{5\lambda}{4}, \ldots}$$

uzly stojatého vlnění

Tedy i vzdálenost každých dvou sousedních uzlů je rovna polovině vlnové délky a mezi uzlem a kmitnou je vždy čtvrtina vlnové délky.

Jak už bylo řečeno, je stojaté vlnění důležité u lineárních útvarů (tělesa, u kterých převažuje jeden rozměr nad druhými dvěma), po odrazu postupného vlnění na konci (pevném nebo volném). Takovým způsobem tedy kmitají různé tyče, struny a vzduchové sloupce – je tedy zřejmá aplikace například v akustice hudebních nástrojů.

3) Již u kmitů hmotného bodu jsme zjistili, že prakticky nelze rozumně složit kmity různé frekvence, kromě případu ***blízkých frekvencí*** .

Prozkoumejme proto, jaký výsledek bude mít interference dvou stejně lineárně polarizovaných harmonických vlnění (v bodové řadě či rovinných) šířících se stejným směrem, jejichž úhlové frekvence, vlnové délky a úhlové vlnočty se od sebe velmi málo odlišují, tedy :

$$\boxed{\omega_1 \approx \omega_2 , \qquad \lambda_1 \approx \lambda_2 , \qquad k_1 \approx k_2}$$

Předpokládejme opět pro maximální jednoduchost, že vlny mají stejné amplitudy a nulové fázové konstanty, tedy :

$$u_1(x,t) = A \cdot sin(\omega_1 \cdot t - k_1 \cdot x)$$
$$u_2(x,t) = A \cdot sin(\omega_2 \cdot t - k_2 \cdot x)$$

Výsledné vlnění, vzniklé složením těchto vln, pak bude popsáno rovnicí :

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = A \cdot sin(\omega_1 \cdot t - k_1 \cdot x) + A \cdot sin(\omega_2 \cdot t - k_2 \cdot x)$$

Po vytknutí amplitudy můžeme aplikovat známý vzorec pro součet sinů :

$$sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Dostaneme tak :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 2A \cdot sin\,\frac{\omega_1 \cdot t - k_1 \cdot x + \omega_2 \cdot t - k_2 \cdot x}{2} \cdot cos\,\frac{\omega_1 \cdot t - k_1 \cdot x - \omega_2 \cdot t + k_2 \cdot x}{2} \\ &= 2A \cdot sin\,\frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot t - (k_1 + k_2) \cdot x}{2} \cdot cos\,\frac{(\omega_1 - \omega_2) \cdot t - (k_1 - k_2) \cdot x}{2} \end{aligned}$$

Jestliže označíme :

$$\boxed{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega} \qquad \boxed{\frac{k_1 + k_2}{2} = k}$$

$$\boxed{\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega} \qquad \boxed{k_1 - k_2 = \Delta k}$$

Pak lze výsledek zapsat jednodušeji :

$$\boxed{u = 2A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \cdot cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot x\right)}$$ ***interference vlnění blízkých frekvencí***

Protože jsou všechny úhlové frekvence a všechny úhlové vlnočty zřejmě prakticky stejné :

$\boxed{\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2}$ $\boxed{k \approx k_1 \approx k_2}$

A tedy vzájemné odchylky těchto veličin jsou velmi malé :

$\boxed{\Delta\omega \to 0}$ $\boxed{\Delta k \to 0}$

Můžeme proto takové vlnění považovat za ***skoro harmonické postupné vlnění*** s úhlovou frekvencí a úhlovým vlnočtem prakticky stejným s výchozími vlnami :

$$u = A' \cdot \sin(\omega t - k\,x)$$

Ale s amplitudou, která se velni pomalu mění s místem i časem :

$$A' = 2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot x\right)$$

Uvažme konkrétně, co tyto změny znamenají :

1) Jestliže bychom sledovali ***časový průběh kmitů*** určitého hmotného bodu v bodové řadě, tedy se zvolenou konstantní souřadnicí :

$\boxed{x = konst}$

Potom ve fázích sinu a kosinu vzniknou konstantní členy:

$$u = 2A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot x\right) =$$
$$= 2A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t + \psi_o\right)$$

Pro počátek osy - tedy bod s nulovou souřadnicí – jsou tyto konstanty ovšem nulové a rovnice kmitů bude mít nejjednodušší tvar :

$$u(x=0,t) = u(t) = 2A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right)$$

Vidíme, že vznikly kvaziharmonické kmity s frekvencí přibližně stejnou jako výchozí kmity (vlny) a s velmi pomalu proměnnou amplitudou (protože $\Delta\omega \to 0$) - to jsou ale známé kmity, které vznikají při skládání rovnoběžných kmitů blízké frekvence - tzv. ***rázy*** . Je zřejmé, že hmotné body v jiných místech kmitají v principu stejně, jen s fázovými posuvy, které způsobují výše uvedené konstanty.

2) Uvažme dále, jak vypadá ***průběh vlnění na celé bodové řadě*** v nějakém určitém, zvoleném čase, tedy za podmínky :

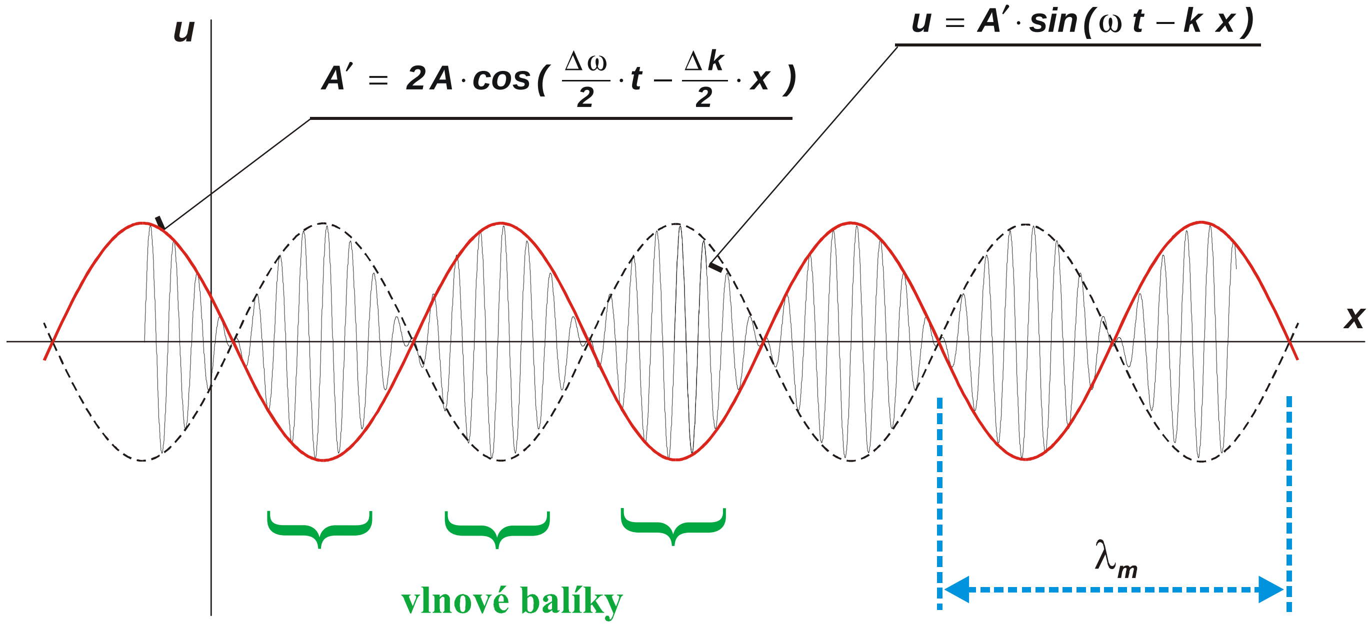
$\boxed{t = konst}$

Potom ve fázích sinu a kosinu opět vzniknou konstantní členy :

$$u = 2A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot x\right) =$$
$$= 2A \cdot \sin(\alpha - k \cdot x) \cdot \cos\left(\beta - \frac{\Delta k}{2} \cdot x\right)$$

V nulovém čase pak budou konstanty také nulové a rovnice bude mít nejjednodušší tvar :

$$u(x, t = 0) = u(x) = 2A \cdot \sin(-k \cdot x) \cdot \cos\left(-\frac{\Delta k}{2} \cdot x\right)$$



Protože je $\Delta k \to 0$, můžeme vzniklé vlny považovat za kvaziharmonické, s vlnovou délkou stejnou jako výchozí vlnění, jejichž amplituda se velmi pomalu a periodicky mění (je ***modulovaná***) – vzniká tak „obalová křivka“ ve tvaru sinusové vlny s dlouhou vlnovou délkou λ_m (vlnová délka ***amplitudové modulace***).

Toto vlnění můžeme popsat jako prostorovou řadu skupin vln – tzv. ***vlnové grupy*** ***(balíky, klubka)*** .
(Graficky se vlnové grupy podobají rázům – ale tam byl proměnnou čas - nyní jde o prostorové útvary – jsme přece na ose x !!)

Vlnovou délku modulace lehce určíme jako nejmenší vzdálenost na ose x, po které se opakuje průběh amplitudy. Protože funkce kosinus má periodu 2π bude platit :

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t - \frac{\Delta k}{2}\cdot x\right) - \left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t - \frac{\Delta k}{2}\cdot(x+\lambda_m)\right) = 2\pi$$

Vyřešením dostaneme :

$$\frac{\Delta k}{2}\cdot\lambda_m = 2\pi$$

$$\boxed{\lambda_m = \frac{2\pi}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{4\pi}{\Delta k}}$$

Z obrázku je vidět, že šířka grupy vln je rovna právě polovině vlnové délky λ_m, tedy :

$$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi}$$

Nalezli jsme tak „podivnou" souvislost mezi rozdílem vlnočtů použitých vln a šířkou vlnového klubka – čím větší bude rozdíl vlnočtů (tedy i rozdíl vlnových délek), tím menší vlnové klubko vznikne.
Aplikací tohoto vztahu při studiu pohybu mikročástice pak vznikla jedna z nejdůležitějších rovnic moderní kvantové fyziky – tzv. ***Heisenbergovy relace neurčitosti*** .

K velmi zajímavým výsledkům dále dojdeme, jestliže budeme přemýšlet o tom, co vlastně grupy vln v prostoru dělají ? - Jde o postupné vlnění, tedy zřejmě postupují – pohybují se - ve směru osy x .
Ano, a pohybují se fázovou rychlostí ?
Zopakujme si, co to vlastně je fázová rychlost ? - Je to rychlost postupu míst (ploch) stejné fáze vlnění, tj. fáze (argumentu) funkce sinus. Pro tato místa tedy platí :

$$\omega\cdot t - k\cdot x = konst.$$

Rovnici diferencujeme :

$$\omega\cdot dt - k\cdot dx = 0$$

Pak podíl diferenciálů dráhy a času je jistě rychlost postupu těchto míst :

$$\boxed{c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}}$$

fázová rychlost vlnění

Rychlost pohybu vlnového klubka bychom pak mohli určit jako rychlost například jeho vrcholu, nebo obecně jakéhokoliv místa určité amplitudy – můžeme tuto rychlost tedy definovat jako rychlost postupu (pohybu) míst stejné amplitudy.

V naší rovnici vlnění je amplituda dána vztahem:

$$A' = 2A \cdot cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot x \right)$$

A tedy pro místa stejné – konstantní - amplitudy musí platit, že je konstantní argument (fáze) funkce kosinus :

$$\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot x = konst.$$

Rovnici diferencujeme :

$$\frac{\Delta\omega}{2} \cdot dt - \frac{\Delta k}{2} \cdot dx = 0$$

A podíl diferenciálů dráhy a času pak opět bude rychlost postupu těchto míst – míst stejné amplitudy, a celého klubka (při napohled zřejmém předpokladu, že klubko nemění tvar) :

$$c_{gr} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Vidíme, výraz pro tuto rychlost – nazývá se grupová rychlost - je principiálně jiný, než pro rychlost fázovou. V limitě pro vlny velmi blízké frekvence můžeme použít diferenciály :

$$\boxed{c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}}$$

grupová rychlost vlnění

Dospěli jsme tak k závažnému poznatku :

Vlnové balíky se pohybují v prostoru grupovou rychlostí, která je obecně odlišná od rychlosti fázové !!

Další úvahy pak zásadně zesílí praktický i teoretický význam vlnových grup a jejich rychlosti.

Rovnice monochromatického postupného vlnění (jedné frekvence a vlnové délky) :

$$u(x,t) = A \cdot sin\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

popisuje vlastně jen teoretický jev – stav kmitů prostředí – který je v libovolném čase vždy rozprostřen od mínus do plus nekonečna !!

Skutečné zdroje (elektromagnetických) vln – vysílače - ovšem generují **buď** nemonochromatické vlnění (viz výše amplitudově modulovanou vlnu – ta vznikla sice jen z vln dvou frekvencí – ale například při reálném přenosu celého hudebního zvukového pásma (20 Hz – 20 kHz) musí být složen celý takový interval nekonečného počtu vln – přitom opět vznikají vlnové grupy),

nebo vysílače generují přímo časově ohraničené vlny – pulzy – a ty lze matematicky vždy vyjádřit jako složení (součet) nekonečného počtu vlnění z určitého intervalu (matematická Fourierova analýza) a výsledkem je opět grupa vln.

V každém případě má tedy reálné vlnění formu vlnových grup a tyto grupy přenášejí vysílanou energii (a vysílané informace). K tomuto závěru lze také dojít, když uvážíme, že vlnová klubka obsahují všechna maxima vln (kmitů) - a maxima vždy určují celkovou energii kmitavého pohybu (viz vzorec pro energii netlumených i tlumených kmitů).

Tedy celkem :

Energie vlnění (a přenášené informace) se prostorem šíří grupovou rychlostí.

Proto je stanovení grupové rychlosti velmi důležité a věnujeme mu v následujících řádcích trochu pozornosti :

Víme, že pro výpočet grupové rychlosti musíme derivovat úhlovou rychlost podle úhlového vlnočtu (vlnového čísla). Známe také obecný vztah (plyne také z předchozích vztahů pro fázovou rychlost) :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda} = c \cdot k$$

Vidíme, že musíme derivovat součin dvou veličin - výsledek derivace bude proto principiálně záviset na tom, jestli je fázová rychlost konstanta nebo funkce. Tedy rozlišíme :

1) *Fázová rychlost vlnění v <u>daném prostředí</u> je <u>konstantní</u>, nezávisí na úhlovém vlnočtu – tedy nezávisí ani na vlnové délce. Říkáme, že takové* ***<u>prostředí nemá disperzi</u>*** *– příkladem je vakuum.*

Jestliže tedy platí :

$$c = konst.$$

Pak je derivace úhlové rychlosti jednoduchá :

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(c \cdot k) = c$$

Grupová rychlost v bezdisperzním prostředí je rovná fázové rychlosti.

1) *Druhou možností pak je, že fázová rychlost závisí na vlnové délce. Pak monochromatické vlny různých vlnových délek mají v daném prostředí různé fázové rychlosti –* ***<u>prostředí má disperzi</u>*** *– takové je běžné látkové prostředí, například sklo.*

(disperze = rozptyl, rozklad vlnění na jednotlivé monochromatické vlny - každá se ve společném svazku šíří jinou rychlostí a při vhodném experimentálním uspořádání je lze od sebe i oddělit – lom světla hranolem) .

V tomto případě je tedy fázová rychlost funkcí :

$$c = c(\lambda) = c(k)$$

Úhlová rychlost je pak komplikovanější funkcí vlnočtu než u bezdisperzního prostředí :

$$\boxed{\omega(k) = c \cdot k = c(k) \cdot k}$$ **<u>*disperzní vztah (relace)*</u>**

A grupovou rychlost vypočítáme :

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(c \cdot k) = c + k \cdot \frac{dc}{dk} \neq c$$

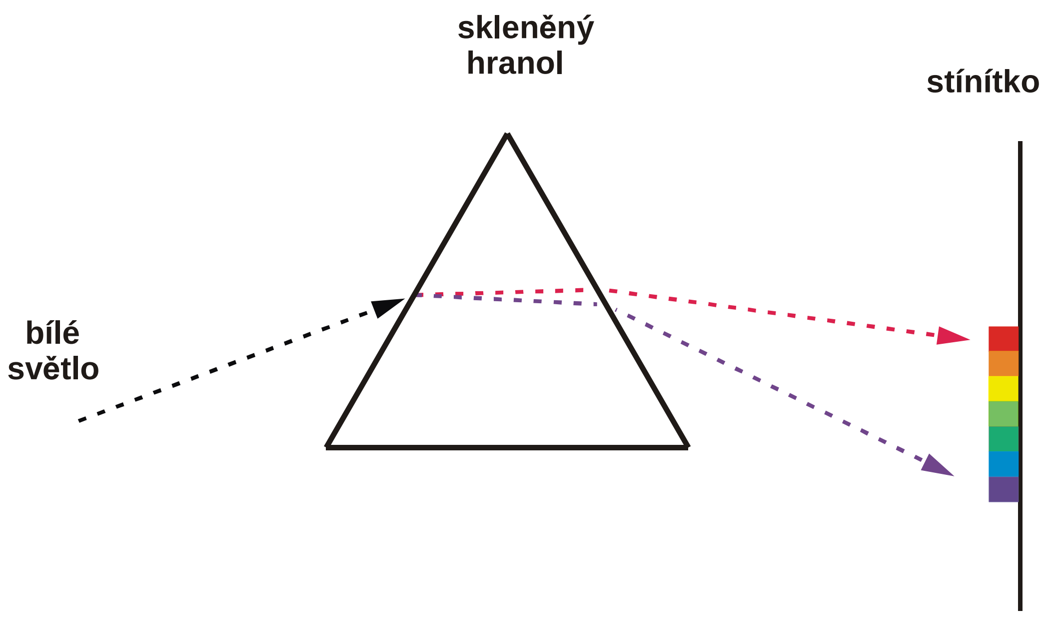
V tomto případě se již grupová rychlost bude lišit od rychlost i fázové a je zřejmé, že podle znaménka derivace může být větší i menší než fázová rychlost. Rozlišíme tedy dále :

a) *Jestliže bude tato* **<u>*derivace záporná*</u>** *, tj. když fázová rychlost klesá s úhlovým vlnočtem (a tedy roste s vlnovou délkou), pak grupová rychlost vždy vychází menší než fázová rychlost :*

$$c_{gr} = c + k \cdot \frac{dc}{dk} < c$$

To je případ tzv. **<u>*normální disperze*</u>** , ke které dochází například při šíření světelného vlnění sklem. S <u>rostoucí</u> vlnovou délkou tedy ve skle roste fázová rychlost světla a <u>klesá index lomu</u> skla (který je definován jako poměr rychlosti světla ve vakuu a v látce).

Proto se na skleněném hranolu <u>nejméně láme</u> světlo s největší vlnovou délkou – <u>červené</u> (760 nm) a <u>nejvíce se láme</u> světlo s nejkratší vlnovou délkou – <u>fialové</u> (360 nm).



b) Jestliže fázová rychlost bude mít ***kladnou derivaci*** *, tj. když fázová rychlost roste s úhlovým vlnočtem (a tedy klesá s vlnovou délkou), pak grupová rychlost vždy vychází větší než fázová rychlost :*

$$c_{gr} = c + k \cdot \frac{dc}{dk} > c$$

To je případ tzv. ***anomální disperze*** , kterou pozorujeme u látkových prostředí výrazně méně často (u některých látek a jen v okolí vlnových délek, které tyto látky silně absorbují)

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 05/2010**