1. Úvod do základních pojmů teorie pravděpodobnosti

1.1 Úvodní pojmy

Většina exaktních věd zobrazuje své výsledky rigorózně tj. výsledky jsou získávány na základě přesných formulí a jsou jejich interpretací. Příkladem je většina výsledků klasické fyziky (výpočet hmotnosti, rychlosti, teploty), chemie(stavové rovnice). Přesto se v procesu vývoje lidské společnosti postupně objevovaly jevy, jejichž přesný výsledek nebylo možno určit – jako první jsou uváděny klasické hazardní hry již v raném středověku (vrhcáby neboli hod kostkou nebo kostkami, karetní hry). Takovýchto případů stále přibývalo dokonce i v exaktních vědách. Začalo mít proto smysl se jimi důkladněji zabývat. Matematickou interpretací takovýchto jevů se zabývá obor teorie pravděpodobnosti.

Jedním ze základních pojmů teorie pravděpodobnosti je **náhodný pokus**. Je to děj, který je možno libovolněkrát opakovat (alespoň hypoteticky), přičemž výsledky takovýchto dějů nejsou jednoznačně určeny vstupními podmínkami, zároveň je však stabilní do té míry, že relativní četnost výsledků pokusu se postupně přibližuje libovolně blízko určitému číslu. Podle takovéhoto popisu jsou dříve uvedené příklady hodu kostkou, hraní karet jednoduchými případy náhodných pokusů. Nás nebude zajímat vlastní provádění náhodných pokusů, ale především výsledky takovýchto dějů. Takovýto pohled vede k pojmu **náhodného jevu**. **Náhodným jevem** budeme rozumět libovolný výrok (tvrzení)o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po provedení náhodného pokusu prohlásit zda je či není pravdivé.

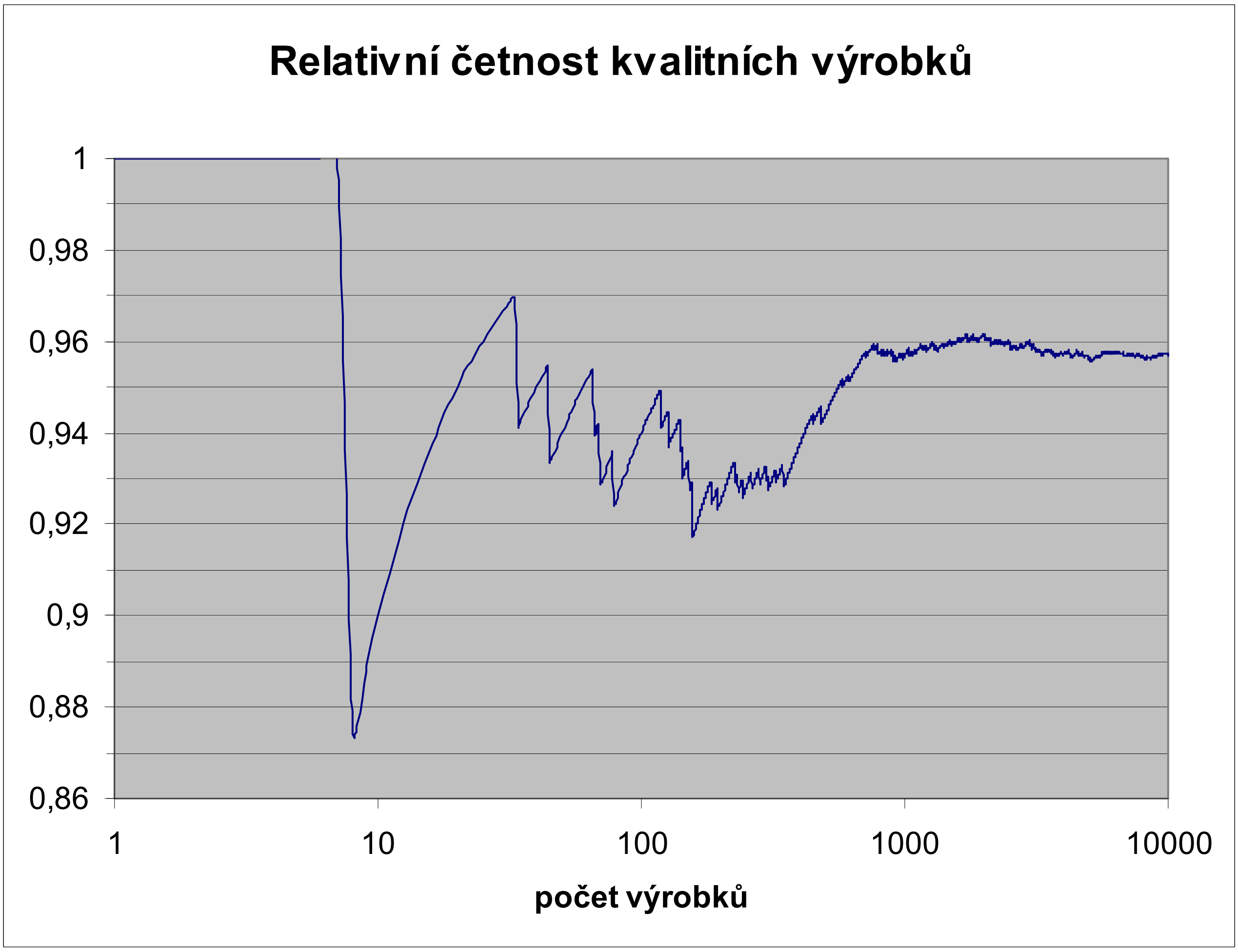
V tomto textu budeme náhodné jevy označovat zásadně velkými písmeny abecedy. Příklady takovýchto náhodných jevů může být padnutí čísla 3 při hodu kostkou, vylosování čísel při tahu sportky, pohlaví narozeného dítěte, přítomnost elementární částice na daném místě, odpověď na otázku v dotazníku atd. Všechny možné výsledky náhodného pokusu (např. hodu kostkou) budeme dále označovat symbolem $\mathbf{\Omega}$ a nazývat základní množinou. Jestliže provádíme hod kostkou je základní množinou $\mathbf{\Omega} =\{1,2,3,4,5,6\}$. V případě, že množina $\mathbf{\Omega}$ je konečná nebo spočetná mluvíme o tzv. klasické teorii pravděpodobnosti (podrobnosti jsou uvedeny v poznámce I. a II. na konci této kapitoly)..

Představme si, že budeme postupně zkoumat produkci určitého výrobku přímo na konci výrobní linky. Symbolem A označíme náhodný jev výrobek je kvalitní, symbolem ¬A výrobek je nekvalitní. Budeme s delší časovou perspektivou zaznamenávat postupně náhodné jevy A a ¬A tak jak budou výrobky vyráběny. O povaze náhodného jevu A nebude vypovídat počet realizací A , ale bude mít smysl zjišťovat jaký je podíl kvalitních výrobků na celé výrobě. . Celkový objem kvalitních výrobků označujeme v teorii pravděpodobnosti a statistice jako **absolutní četnost kvalitních výrobků** a podíl kvalitních výrobků na celkovém množství výrobků jako **relativní četnost kvalitních výrobků**

V dále uvedeném grafu můžeme pozorovat přibližování hodnoty relativní četnosti náhodného jevu A při zvětšování počtu náhodných pokusů k určitému číslu. Toto číslo můžeme za daných podmínek skutečně tomuto jevu jednoznačně přiřadit a nazýváme ho **pravděpodobností náhodného jevu A** . Způsob zavedení pojmu pravděpodobnosti je v tomto případě netradiční jde o tzv. statistický přístup. Na základě obrázku 1.1 provedeme tedy konstrukci pravděpodobnosti náhodného jevu A (dále **P(A)**), zároveň uveďme jaké jsou základní vlastnosti takovéhoto pojmu pravděpodobnost :

1. Pravděpodobnost P(A) nabývá hodnot mezi 0 a 1. Náhodný jev , pro který je P(A) = 0 nazýváme **jev nemožný** ; jestliže P(A) = 1 nazýváme náhodný jev jako **jev jistý**.

2. Při provádění náhodného pokusu mnohokrát (1000x , 10000x atd.) je určité, že relativní četnost výskytu náhodného jevu se nemusí rovnat (a většinou také nerovná) hodnotě P(A), bude se od ní však jen nepatrně lišit.
3. Jestliže tedy budeme chtít ověřit , zda náhodný jev je či není jistý je možné opakovat mnohokrát náhodný pokus, pokud je výsledek jen nepatrně odlišný od jedné (menší než jedna) je prakticky zřejmé, že při jediném náhodném pokusu náhodný jev nastane. Podobné tvrzení lze uvést i o jevu nemožném.
4. Takovýto přístup k tvorbě pravděpodobnosti je možný jen tam, kde můžeme skutečně reálně opakovat náhodné pokusy a výsledky interpretovat jako pravděpodobnosti, selže tam, kde by opakování bylo možné, ale z určitých důvodů nemožné. Proto se teorie pravděpodobnosti většinou jako matematická teorie buduje axiomaticky viz [1] nebo poznámka I. na konci této kapitoly.



Pokud bychom se zabývali naším konkrétním případem dále a prováděli šetření několik dní mohli bychom získat například výsledek uvedený v tabulce 1.1. Údaje, které jsou v tabulce uvedeny podporují grafické výsledky, lze z nich tedy usuzovat, že pravděpodobnost vyrobeného výrobku se nemění a je rovna přibližně 0,957.

Den	Počet vyrobených výrobků	Relativní četnost kvalitních výrobků
1.2.	12563	0,961
2.2.	13056	0,955
3.2.	12489	0,958
4.2.	12783	0,957
5.2.	12986	0,959
6.2.	12302	0,961
7.2.	12685	0,951
8.2.	12548	0,957
Celkem	**101412**	**0,957352019**

1.2 Základní pojmy kombinatoriky

V této části budeme předpokládat, že veškeré množiny , s kterými budeme pracovat jsou konečné.

Pojem 1.4.1

Nechť množina **A** má celkem **n** > 0 prvků. Permutací nazveme uspořádání prvků množiny **A** tak, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden právě jednou. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem permutací (nebo počtem permutací bez opakování) množiny **A**. Tento počet $P(n) = n!$ (součin všech přirozených čísel od 1 do čísla n).

Příklad 1.4.1

Ve skupině 6 studentů chceme zjistit počet všech možných pořadí přihlášení na zkoušku.

Řešení:

Student se na zkoušku hlásí 1x tedy hledáme počet permutací tedy $P(6) = 6! = 120$. Studenti se můžou přihlásit celkem 120 možnými způsoby.

Pojem 1.4.2

Nechť množina **A** má celkem **n** > 0 prvků. Permutací s opakováním nazveme uspořádání prvků množiny **A** tak, že v tomto uspořádání se každý prvek může opakovat 0 až n krát. Celkový počet prvků takovéhoto uspořádání je roven n. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem permutací s opakováním množiny **A**. Tento počet $P'(n) = n^n$.

Příklad 1.4.2

Podržme zadání stejné jako v předchozím případu. Zjistěme jaký počet různých uspořádání je možné nalézt za těchto podmínek.

Řešení :

Podle předchozího je tento počet roven $P'(6) = 6^6 = 46\,656$. V tomto případě se studenti mohou přihlásit celkem 46 656 způsoby.

Pojem 1.4.3

Nechť množina **A** má celkem **n** > 0 prvků. Variací k – té třídy bez opakování nazveme libovolnou k člennou podmnožinu V množiny **A** takovou, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden nejvýše jednou a dále v daném uspořádání záleží na pořadí prvků. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem Variací k – té třídy bez opakování množiny **A**. Tento počet je roven

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1)...(n-k+1)$$

Příklad 1.4.3

Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž zápisu jsou pouze číslice 4, 5, 6, 7, a to každá nejvýše jednou.

Řešení:

Počet jednomístných přirozených čísel je roven počtu variací první třídy ze čtyř prvků; pro dvojmístná přirozená čísla je počet roven variacím druhé třídy ze čtyř a konečně jediná trojmístná přirozená čísla , která splňují zadání jsou čísla začínající 4, jejich počet je tedy roven počtu variací bez opakování druhé třídy ze čtyř prvků. Celkově tedy bude $x = V_1^4 + V_2^4 + V_2^3 = \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{3!}{(3-2)!} = 4 + 12 + 6 = 22$.

Podmínky splňuje 22 přirozených čísel.

Pojem 1.4.4

Nechť množina **A** má celkem **n** > 0 prvků. Variací k – té třídy s opakování nazveme libovolné k členné uspořádání prvků množiny **A** takové, že v tomto uspořádání záleží na pořadí prvků a každý prvek uveden nejvýše jednou. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem Variací k – té třídy s opakování množiny **A**. Tento počet je roven

$$V'^n_k = n^k$$

Příklad 1.4.4

Předpokládejme, že první dva znaky SPZ automobilu v naší republice se skládají ze dvou znaků abecedy, a zbylých pět členů kombinace jsou čísla. Určete počet Všech SPZ.

Řešení:

První část se skládá z dvojice písmen (je jich 26), která mohou libovolně opakovat, přičemž záleží na pořadí (jde o uspořádanou dvojici). Celkově jich je tedy jako počet variací s opakováním druhé třídy z 26 prvků. Druhá část SPZ je tvořena uspořádanou pěticí čísel, jejich počet je roven počtu variací s opakováním 5 třídy z 10 prvků.

Celkový počet značek je proto roven :

$$x = V'^{26}_2 . V'^{10}_5 = 26^2 . 10^5 = 67600000$$

Pojem 1.4.5

Nechť množina **A** má celkem **n** > 0 prvků. Kombinací k – té třídy bez opakování nazveme libovolnou k člennou podmnožinu V množiny **A** takovou, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden nejvýše jednou a dále v daném uspořádání nezáleží na pořadí prvků. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem kombinací k – té třídy bez opakování množiny **A**. Tento počet je roven

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Příklad 1.4.5

Zjistěte počet možností výběru správné šestice při hře sportka.

Řešení:

Celkový počet těchto šestic je roven počtu kombinací šesté třídy z 49 prvků.

$$x = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!.(49-6)!} = \frac{49!}{6!.43!} = \frac{49.48.47.46.45.44}{1.2.3.4.5.6} = 49.4.47.46.3.11 = 13\,983\,816 \quad .$$

Pojem 1.4.6

Nechť množina **A** má celkem **n** > 0 prvků. Kombinací k – té třídy s opakováním nazveme libovolnou k člennou podmnožinu V množiny **A** takovou, že v tomto uspořádání je každý prvek uveden nejvýše k krát a dále v daném uspořádání nezáleží na pořadí prvků. Počet takovýchto uspořádání nazýváme počtem kombinací k – té třídy s opakování množiny **A**. Tento počet je roven

$$C'^{n+k-1}_{k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!.(n-1)!}$$

Příklad 1.4.6

Hra domino představuje soubor kostek , z nichž je každá kostka rozdělena na dvě poloviny a každá polovina je samostatně označena body 0 až 8. Každá kostka se ve hře vyskytuje pouze jednou. Určete počet kostek jedné hry.

Řešení:

Jde o kombinace druhé třídy s opakováním z devíti prvků (nezáleží nám na pořadí výběru dané dvojice , prvky se mohou opakovat a celých čísel od 0 do 8 je devět). Podle výše uvedeného vztahu je počet kostek jedné hry roven

$$C'^{9}_{2} = \binom{9+2-1}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!.8!} = 45.$$

1.3 Zákony pro práci s náhodnými jevy a pravděpodobnostmi

Při praktické práci se většinou setkáváme s úkoly, které závisí často na více než na jednom náhodném jevu. Například při určité odpovědi v dotazníku sledujete zároveň tuto odpověď , ale zároveň ji konfrontujete s faktem pohlaví respondenta. Proto je důležité se zabývat aritmetikou zákonů teorie pravděpodobnosti. Budeme tedy dále uvádět jisté definice základních pojmů.

Jev opačný k náhodnému jevu A je náhodný jev B takový , že nastává právě tehdy, když náhodný jev A nenastává.Příklad : A – při hodu kostkou padne 6; jev B při hodu kostkou padnou buď 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4 nebo 5.

Jevy A a B se nazývají **neslučitelné** , jestliže nemohou oba nastat součastně . Bude – li náhodným jevem A např. padnutí 6 , B může být např. náhodný jev padnutí lichého čísla.

Důležité je , že pro dva náhodné jevy A a B platí, že **sjednocení** (sečtení) náhodných jevů A a B je také náhodný jev C = A U B . Tento náhodný jev tedy nastává právě tehdy, když nastává aspoň jeden z náhodných jevů A , B. Podle poznámky I. na konci této kapitoly je náhodným jevem dokonce libovolné konečné nebo spočetné sjednocení náhodných jevů.

Podobně pro dva náhodné jevy A a B platí, že **průnik** náhodných jevů A,B je opět náhodný jev C = A ∩ B .Tento náhodný jev nastává právě tehdy , když nastávají oba náhodné jevy A , B součastně. Podobně jako u předchozího případu platí, že konečné nebo spočetné průniky náhodných jevů jsou opět náhodné jevy.

Příklad 1.2.1:

Náhodný jev A nastává při hodu kostkou, jestliže padne 3 nebo 6. Náhodný jev B nastane , jestliže padne sudé číslo.

Potom C = A U B = {2;3;4;6} ; dále C = A ∩ B = {6}.

Pro vlastní výpočty pravděpodobností jistých situací je důležité se naučit pracovat s hodnotou pravděpodobností jako s určitou mírou , která má jisté vlastnosti :

I. **Vlastnost doplňku** . Nechť A je náhodný jev a B je jev opačný k náhodnému jevu A . Potom platí

$$P(B) = 1 – P(A) \qquad (1.1)$$

II. **Vlastnost sjednocování**. Jestliže náhodné jevy A, B jsou neslučitelné , potom platí

P(A U B) = P(A) + P(B)   (1.2)

Exaktní informace nalezne čtenář buď v části 1.5 na konci této kapitoly nebo v [1]. Z těchto vlastností můžeme odvodit jednu velmi důležitou informaci o obecné hodnotě pravděpodobnosti sjednocení či průniku dvou náhodných veličin.

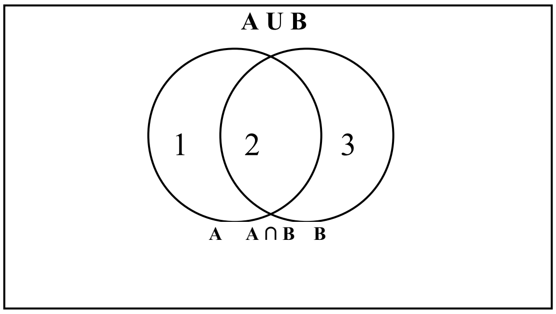
Tvrzení 1.2.1

Nechť A, B jsou náhodné jevy potom platí

P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)   (1.3)

Důkaz:

Provedeme obrázkem 1.2



Z obrázku je zřejmé, že sjednocení náhodných jevů A a B je možno upravit na sjednocení tří neslučitelných náhodných jevů. Pokud tedy sečteme pravděpodobnosti náhodných jevů A a B je výsledek nutně větší o pravděpodobnost průniku těchto náhodných jevů, neboť ten se vyskytuje v obou náhodných jevech součastně, počítali bychom ho tedy dvakrát.

Příklad 1.2.1 pokračování

Řešení:

Počítáme pravděpodobnosti nyní nikoli pomocí statistické definice pravděpodobnosti, ale pomocí definic uvedených v poznámce I. na konci této kapitoly.

P(A) = 2 / 6 = 0,33 ; P(B) = 3 / 6 = 0,5.

P(A ∩ B) = 1 / 6 = 0,167   ; P(A U B) = 4 / 6 = 2 / 3 = 0,67 nebo podle (1.3)

P(A U B) = 0,33 + 0,5 -0,167 = 0,67

Při řešení určitých konkrétních situací nás nezajímá přímo otázka pravděpodobnosti určitého náhodného jevu A , ale řešíme situaci výskytu náhodného jevu A za podmínky, že zároveň nastal určitý náhodný jev B (předpokládáme, jev B není nemožný) . Například nás mohou zajímat odpovědi na určitou otázku v dotazníku za předpokladu, že respondent byl muž ; Pro řešení takovýchto situací byl vymyšlen celý matematický aparát tzv. podmíněných pravděpodobností. Principiální myšlenkou je zahrnout do výpočtu pravděpodobnosti (podmíněné) jevu A jen tu část, která je společná oběma náhodným jevům.

Proto nás nepřekvapí následující definice **podmíněné pravděpodobnosti** jevu A vzhledem k náhodnému jevu B(opět ne nemožnému) jako

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (1.4).$$

Z výrazu (1.4) můžeme odvodit pravděpodobnost průniku dvou náhodných jevů A a B pomocí podmíněné pravděpodobnosti jako

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) \qquad (1.5)$$

Příklad 1.2.2

Zjistěte hodnotu podmíněné pravděpodobnosti náhodného jevu A vzhledem k náhodnému jevu B z příkladu 1.2.1.

Řešení:

Hodnotu podmíněné pravděpodobnosti zjistíme pomocí výsledků příkladu 1.2.1. Tedy

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}167}{0{,}5} = 0{,}33.$$

Toto číslo vyjadřuje relativní četnost náhodného jevu A mezi případy, kdy zároveň nastal i náhodný jev B.

Pro vlastní práci s pojmem pravděpodobnost náhodného jevu je velmi důležitý pojem **nezávislosti náhodných jevů** (dvojice náhodných jevů). Intuitivně cítíme, že jevy A a B jsou nezávislé, jestliže výskyt jednoho neovlivňuje výskyt druhého náhodného jevu. Bude tedy podstatné pro zkoumání této vlastnosti chování pravděpodobnosti průniku náhodných jevů A a B . Matematickým vyjádřením této myšlenky je to, že hodnota podmíněné pravděpodobnosti jednoho náhodného jevu vůči druhému musí být rovna nepodmíněné pravděpodobnosti. Tedy **P(A / B) = P(A)** nebo velmi podobně **P(B / A) = P(B).** Odsud můžeme odvodit i jiný způsob definice nezávislosti náhodných jevů A a B :

Definice 1.1

Náhodné jevy A , B (ani jeden není nemožný) nazveme ***nezávislé*** právě tehdy , když

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \qquad (1.6)$$

Definici 1.1 o nezávislosti náhodných jevů lze rozšířit na libovolný počet nezávislých jevů A_1, A_2, …,A_k. Označíme-li *C* jev, který spočívá v současném výskytu těchto jevů, tj. C= $A_1 \cap A_2, \cap \ldots \cap A_k$, potom pravidlo o násobení pravděpodobností má tvar

$$P(C) = P(A_1 \cap A_2, \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \ldots P(A_k) \qquad (1.7)$$

V tomto případě ale žádáme, aby takovýto vztah platil pro libovolnoupodmnožinu takových náhodných jevů. Takže například v případě tří náhodných jevů A_1, A_2,A_3 budeme požadovat platnost pro všechny možné dvojice náhodných jevů a pro trojici. Půjde tedy o celkem 4 rovnosti!

Příklad 1.2.3

V daném ročníku na gymnáziu, který má 240 žáků bylo hodnoceno v matematické kompozici známkou výborně 30 žáků, v kompozici z českého jazyka celkem 40 žáků. 5 žáků bylo hodnoceno známkou výborně z obou kompozic. Zjistěte, zda náhodný jev být výborný z matematiky je nezávislý na výborném hodnocení z českého jazyka.

Řešení:

Podle vzorce (1.6) nejdříve zjistíme příslušné odhady pravděpodobností jednotlivých náhodných jevů. Pravděpodobnost být výborný v matematice je tedy rovna 30 / 240 = 0,125 ; pravděpodobnost být výborný v českém jazyce je rovna 40 / 240 = 0,167; podle uvedených údajů je pravděpodobnost být zároveň výborný v obou předmětech rovno 5 / 240 = 0,021. Zjistíme , zda platí vztah (1.6): 0,125 . 0,167 = 0,021 . Oba náhodné jsou tedy nezávislé.

Příklad 1.2.4

Po provedení průzkumu názorů občanů bylo ve vzorku 1500 lidí odpovědělo 820 respondentů kladně na otázku zda se jejich celková situace zlepšila . Celkový počet mužů ve vzorku byl 710. Na otázku záporně odpovědělo 600 lidí , z toho 300 mužů. Nechť A je náhodný jev celková situace se zlepšila, B je náhodný jev celková situace se nezlepšila, C je náhodný jev respondent je muž, D je náhodný jev respondent je žena. Určete odhad podmíněné pravděpodobnosti P(A / C) a P(B / D).

Řešení:

Abychom získali odhad podmíněné pravděpodobnosti P(A / C) je nutné podle vzorce (1.4) postupně zjisti hodnoty $P(A \cap C)$ a P(C).Náhodný jev $A \cap C$ obsahuje muže ,u nichž se situace zlepšila. Celkový počet takovýchto mužů podle zadání je roven 410 , celkový počet mužů je roven 710, proto $P(A \cap C)$ = 410 / 1500 = 0,273; P(C).= 710 / 1500 = 0,473. Použijeme – li vzorec (1.4) je P(A/C) = 0,273 / 0,473 =0,577. Pokud budeme počítat přímo, tak počet mužů splňující naše podmínky je roven 410 a celkový počet mužů je 710 , tedy počítejme ještě jednou podmíněná pravděpodobnost $P(A \cap C)$ = 410 / 710 = 0,577.

Obdobně budeme postupovat i v případě výpočtu P(B / D). Nejdříve určíme počet prvků množiny D (žen) – ten je roven 1500 – 710 = 790 žen. Pro výpočet je podstatné zjištění počtu prvků $B \cap D$ tedy žen,které nejsou spokojeny. Tento počet je roven 300. Tedy počítejme $P(B \cap D)$=300/1500 = 0,2; P(D) = 790 / 1500 = 0,523, pro je P(B/D) = 0,2 / 0,523 = 0,382. Budeme – li počítat přímo získáme tuto hodnotu jako podíl 300 a 790.

Příklad 1.2.5

Zjistěte za předchozích podmínek, zda náhodné jevy A a C resp.B a D jsou nezávislé.

Řešení:

Použijeme rovnost (1.6) pro nezávislé náhodné jevy A a C platí $P(A \cap C)$ = P(A) . P(C). V našem případě je $P(A \cap C)$ = 410 / 710 = 0,577 , P(A) = 820 / 1500 = 0,547; P(C) = 710/1500 = 0,473. Pokud by měli být náhodné jevy nezávislé musí platit (1.6) , ale P(A).P(C) = 0,259. Náhodné jevy A a C nejsou tedy nezávislé.

Postupujme obdobně u náhodných jevů B a D. $P(B \cap D)$=300/1500 = 0,2; P(D) = 790 / 1500 = 0,523 ; P(B) = 680 / 1500 = 0,453. Zjistěme tedy hodnotu P(B) . P(D) = 0,523 . 0,453 =0,237. Náhodné jevy B a D nejsou nezávislé.

1.4 Věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec

Vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost sami o sobě nemají velký význam, jejich využití při výpočtech je velmi důležité právě pro existenci tvrzení typu Bayesova vzorce resp. Věty o úplné pravděpodobnosti.

Tvrzení 1.3.1 (věta o úplné pravděpodobnosti)

Nechť náhodné jevy $\{B_i\}$, kde i=1,…,n jsou navzájem neslučitelné a dále je $P(B_i)>0$.

Nechť dále pro náhodný jev A platí, že $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ .Potom

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i).P(B_i) \qquad (1.8)$$

Důkaz:

Protože platí $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, platí tato inkluze $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) \subset A$.

Pravděpodobnost je podle poznámky II. na konci této kapitoly monotóní tedy platí $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i).P(B_i)$.

Q.E.D.

Pro platnost tohoto tvrzení je podstatné, že systém náhodných jevů B_i je vzhledem k náhodnému jevu A úplný tj. každý prvek množiny A se nachází v právě jedné množině B_i.

Příklad 1.3.1

Nechť A je náhodný jev nutnost jisté opravy určitého typu automobilu. Pravděpodobnost opravy tohoto typu automobilu za předpokladu stáří automobilu do dvou let (náhodný jev B_1) je rovna 0,1; pravděpodobnost opravy tohoto typu automobilu za předpokladu stáří automobilu od 2 do 7 let (náhodný jev B_2) je rovna 0,5; v ostatních případech (náhodný jev B_3) je rovna 0,75. Pravděpodobnosti, že automobil tohoto typu bude patřit do těchto skupin jsou $P(B_1) = 0,3$; $P(B_2) = 0,5$; $P(B_3) = 0,2$. Zjistěte pravděpodobnost této opravy tohoto typu automobilu.

Řešení:

Náhodné jevy B_1 , B_2 ,B_3 jsou navzájem neslučitelné a vždy nastává jen právě jeden z nich. Pro využití předchozího tvrzení je ještě třeba znát podmíněné pravděpodobnosti oprav v jednotlivých kategoriích stáří automobilu, protože je ale známe můžeme přímo dosazovat do vzorce (1.8)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1) .P(B_1) + P(A/B_2) .P(B_2)+ P(A/B_3) .P(B_3) = \\ &= 0,1 . 0,3 + 0,5 . 0,5 + 0,75 . 0,2 = 0,43 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost opravy je tedy 43 %.

Příklad 1.3.2

V průzkumovém dotazníku byla položena jistá otázka a zkoumala se kladná odpověď na ni (náhodný jev A). Pravděpodobnost kladné odpovědi u respondenta ve věku maximálně do 18 let (náhodný jev B_1) je rovna 0,1 ; pravděpodobnost kladné odpovědi u osoby v reprodukčním věku (náhodný jev B_2) je rovna 0,3 ; pravděpodobnost u osoby v postreprodukčním věku (náhodný jev B_3) je rovna 0,4. Pravděpodobnosti jednotlivých náhodných jevů B_i jsou rovny $P(B_1) = 0,25$; $P(B_2) = 0,60$;$P(B_3) = 0,15$. Zjistěte pravděpodobnost kladné odpovědi v dané společnosti.

Řešení:

Podobně jako v předchozím případě ověříme, že náhodné jevy B_1 , B_2 ,B_3 jsou navzájem neslučitelné a vždy nastává jen právě jeden z nich. Použijeme opět vztah (1.8).

$$P(A) = P(A/B_1) .P(B_1) + P(A/B_2) .P(B_2)+ P(A/B_3) .P(B_3) =$$

$$= 0,1 . 0,25 + 0,3 . 0,6 + 0,4 . 0,15 = 0,265$$

Pravděpodobnost kladné odpovědi v celé společnosti je 26,5%.

Druhým velmi významným tvrzením je Bayesova věta , která určuje jakým způsobem lze počítat tzv. podmíněné pravděpodobnosti $P(B_i / A)$ náhodného jevu B_i za podmínky , že nastal náhodný jev A , jestliže známe apriorní pravděpodobnosti $P(B_i)$ a podmíněné pravděpodobnosti $P(A / B_i)$. Přesněji

Tvrzení 1.3.2 (Bayesova věta)

Nechť náhodné jevy $\{B_i\}$, kde i=1,…,n jsou navzájem neslučitelné a dále je $P(B_i)>0$. Nechť dále pro náhodný jev A platí, že $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, P(A) > 0. Potom

$$P(B_j / A) = \frac{P(A / B_j).P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / B_i).P(B_i)} \qquad (1.9).$$

Důkaz:

Podle podmínek tvrzení má $P(B_j / A)$ smysl. Využijeme vztahy (1.4) a (1.8.). Čitatel ve zlomku (1.4) je roven $P(B_j \cap A)$, což je podle (1.5) rovno právě $P(A / B_j) . P(B_j)$. Jmenovatel ve zlomku (1.9) zjistíme přesně podle tvrzení 1.3.1 .

Q.E.D.

Pravděpodobnosti hypotéz před provedením náhodného pokusu $P(B_j)$ se nazývají pravděpodobnosti **a priori** a pravděpodobnosti hypotéz po provedení náhodného pokusu $P(B_j / A)$ se nazývají pravděpodobnosti **a posteriori .**

Příklad 1.3.3

Jeden ze tří střelců vystřelí a zasáhne cíl. Pravděpodobnost zásahu při jednom výstřelu je pro prvého střelce 0,3 , pro druhého střelce 0,5 a pro třetího střelce 0,8. Určete pravděpodobnost, že střílel druhý střelec.

Řešení:

Označíme postupně A_1 – náhodný jev zasáhl 1. střelec; A_2 – náhodný jev zasáhl 2. střelec; A_3 – náhodný jev zasáhl 3. střelec . Označme dále jako náhodný jev A cíl byl zasažen. Jistě platí $P(B /A_1) = P(B /A_2) = P(B /A_3) = 1$. Chceme vypočítat $P(B_2 / A)$, tedy podle (1.9) je

$$P(B_2 / A) = \frac{1.0,5}{1.0,3 + 1.0,5 + 1.0,8} = \frac{0,5}{1,6} = 0,3125 .$$

Příklad 1.3.4

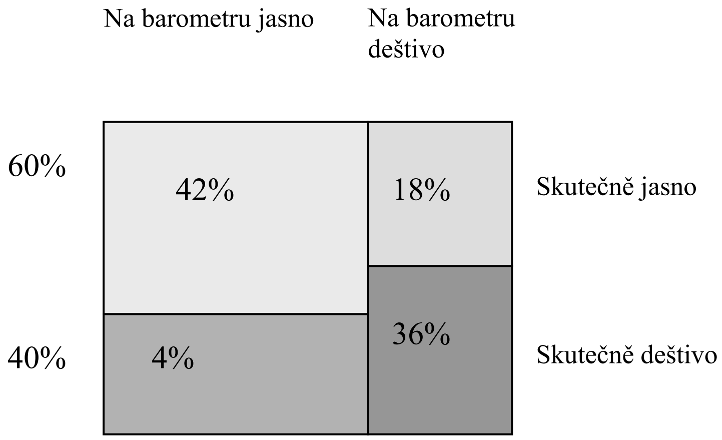
Výrobce barometrů zjistil testováním velmi jednoduchého modelu, že občas ukazuje nepřesně. Za deštivého počasí ukazuje v 10% jasno a za jasného počasí ukazuje déšť ve 30% případů.

V září je u nás zhruba 40% dní deštivých. Předpokládejme, že barometr ukazuje dne 28.9. na deštivo. Jaká je pravděpodobnost, že bude skutečně pršet ?

Řešení:

Pokusíme se provést řešení této úlohy pomocí grafické metody, znázorníme všechny možnosti do tzv. Vennova diagramu.

Obrázek 1.3



Budeme – li tedy vycházet z obrázku 1.3 bude pravděpodobnost , že skutečně prší za předpokladu, barometr ukazuje déšť rovna podílu 0,36 / 0,4 = 0,9.

Odpověď: Hledaná pravděpodobnost je rovna 90%.

1.5 Teoretické základy teorie pravděpodobnosti

V této části vybudujeme teoretický aparát teorie pravděpodobnosti , postupně zavedeme rigorózně všechna základní tvrzení a definice.

1.5.1 Klasická pravděpodobnost.

Definice 1.5.1.1

Nechť množina $\Omega \neq \emptyset$ a konečná. Potom tuto množinu nazveme ***základní*** množinou .

Poznámka 1.5.1.1

Pro případ tzv. **geometrické pravděpodobnosti** budeme předpokládat, že míra (tj. délka, plocha, objem) množiny Ω je konečná a $\Omega \neq \emptyset$.

Podobně jako v části 1. této kapitoly zavedeme pojem náhodného jevu.

Poznámka 1.5.1.2

V souladu s předchozími částmi je množina Ω rovna množině všech možných výsledků náhodného pokusu.

Definice 1.5.1.2

Nechť je Ω základní množina. Potom libovolnou podmnožinu **A** množiny Ω nazveme náhodným jevem (v případě geometrické pravděpodobnosti musí být tato podmnožina měřitelná). V případě , že je množina A jednoprvková nazýváme ji též elementárním náhodným jevem.

Poznámka 1.5.1.3

Pojem elementárního náhodného jevu budeme posléze definovat obecněji v části abstraktní teorie pravděpodobnosti.

Tvrzení 1.5.1.1

Množina $\mathfrak{A}$ všech náhodných jevů má následující vlastnosti :

a) Je neprázdná – obsahuje jev **nemožný** -$\emptyset$; obsahuje jev **jistý** - Ω
b) Jestliže A , B jsou náhodné jevy , potom $A \cup B$ a $A \cap B$ jsou náhodné jevy
c) Jestliže A je náhodný jev , potom jeho doplněk $\Omega \setminus A$ je také náhodný jev

Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý.

Abychom mohli začít reálně pracovat s náhodnými jevy je ještě nutno zavést pojem pravděpodobnosti.

Definice 1.5.1.3
Nechť Ω a $\mathfrak{A}$ mají význam předchozích definic. Potom pro libovolný náhodný jev $A \in \mathfrak{A}$ definujeme následující funkci P

$$P : A \mapsto \frac{card(A)}{Card(\Omega)} \qquad (1.10).$$

(Card(A) je funkce udávající počet prvků množiny A). Tuto množinovou funkci nazveme **pravděpodobností náhodného jevu A**.

Tvrzení 1.5.1.2
Pravděpodobnost má následující vlastnosti:
a) Pro všechny náhodné jevy A platí
   $0 \le P(A) \le 1$ (omezenost pravděpodobnosti)
b) Nechť pro náhodné jevy A, B platí $A \cap B = \emptyset$ (takové náhodné jevy nazýváme neslučitelné). Potom
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (aditivita pravděpodobnosti)
c) Nechť A je náhodný jev a $\Omega \setminus A$ jeho doplněk potom
   $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$ (vlastnost doplňku)
d) $P(\emptyset) = 0$ a $P(\Omega) = 1$.

Důkaz :
Proveďte samostatně dosazením přímo do vztahu (1.10).

Tvrzení 1.5.1.3
Vlastnosti pravděpodobnosti:
a) Pro libovolné náhodné jevy A a B platí $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
b) Pro libovolný náhodný jev A platí $P(A) \ge 0$
c) Pro libovolný náhodný jev A platí $P(A) \le 1$
d) Pro libovolný náhodný jev A platí $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
e) Nechť A,B jsou náhodné jevy takové, že $A \subset B$. Potom $P(A) \le P(B)$

Důkaz:
Nechť $|X|$ označuje počet prvků množiny X.
a) Jistě platí $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$, jestliže tento vztah dělíme $|\Omega|$ dostáváme a).
b) Protože $|A| \ge 0$, je b) zřejmé
c) Protože $|A| \le |\Omega|$ platí jistě i část c) tvrzení
d) Pro tento vztah použijeme část a) . $(\Omega \setminus A) \cap A = \emptyset$ a $P(\emptyset) = 0$. Z části a) tedy přímo vyplývá naše tvrzení.
e) Za uvedených podmínek je jistě $|A| \le |B|$. Odtud již vyplývá dokazovaný vztah.

Příklad 1.5.1.1
V koši je 30 lístků , 20 je bílých a 10 červených. Jaká je pravděpodobnost, že dva vylosované lístky (lístky nevracíme) budou bílý a červený ?
Řešení:
Provedeme podle vztahu (1.10). Počet všech možných dvojic tažených lístků je dán výrazem $\binom{30}{2}$; počet všech příznivých variant je dán součinem 20 . 10. Tedy skutečná pravděpodobnost je rovna $P = \frac{10.20}{\binom{30}{2}} = \frac{200}{\frac{30!}{2!.28!}} = \frac{200}{15.29} = 0{,}4598$.

Příklad 1.5.1.2
Z běžné sady 32 hracích karet vytáhneme 4. Jaká je pravděpodobnost, že :
a) Budou obsahovat aspoň jedno eso
b) Budou obsahovat nejvýše dvě červené?
Řešení:
Pro obě varianty je počet všech možných vytažení 4 karet z 32 roven $\binom{32}{4}$= 35 960.

a) Příklad vyřešíme nejprve pro doplňkový jev (tedy táhneme 4 karty neobsahující žádné eso). Počet příznivých variant pro tento případ tedy je $\binom{28}{4}$ = 20 475. Tedy pro náš případ je počet příznivých vytažení roven 35 960 – 20 475 = 15 485. Hledaná pravděpodobnost je tedy $P = \dfrac{15485}{35960} = 0{,}4306$.
b) Příklad rozdělíme na celkem tři možnosti – obsahují 0,1,2 červené. Pro počet 0 červených je celkových možností $\binom{24}{4}$ = 10 626 ; pro počet 1 červené je celkových možností $\binom{8}{1}\binom{24}{3}$=16 192; pro počet dvou červených $\binom{8}{2}\binom{24}{2}$=7 728. Celkově je tedy příznivých možností 34 546. Hledaná pravděpodobnost je rovna $P = \dfrac{34546}{35960} = 0{,}9607$.

Stejně jako v předchozí části můžeme zavést pojmy podmíněné pravděpodobnosti, nezávislosti náhodných jevů, tvrzení o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu. Jejich důkazy jsou prováděny stejným aparátem, jako tvrzení předchozí části.
Definice 1.5.1.4
Pod pojmem pravděpodobnostní prostor budeme uvažovat trojici {Ω, $\mathfrak{A}$, P}, která má vlastnosti z předchozích definic.

Definice 1.5.1.5
Nechť {Ω, $\mathfrak{A}$, P} je pravděpodobnostní prostor . Systém $\{X_i\}_{i\in I}$ prvků z $\mathfrak{A}$ se nazývá systémem nezávislých náhodných jevů , jestliže pro libovolné $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ platí

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cap P(A_{i_2}) \cap \ldots \cap P(A_{i_n}) \ .$$

Poznámka 1.5.1.4
V definici nezávislosti může být indexová množina I i nespočetná, podstatné je , že předchozí průniky provádíme přes libovolné konečné podmnožiny množiny I.
Tedy jestliže P(B) > 0 a náhodné jevy A , B jsou nezávislé potom P(A/B)=P(A)!

1.5.2 Abstraktní axiomatická (Kolmogorovova) pravděpodobnost.

V této části vymezíme axiomaticky jak obecnou pravděpodobnost, tak i vlastnosti množiny náhodných jevů. Na těchto základech je pak možno budovat další pojmy teorie pravděpodobnosti , jak bude ukázáno v dalších kapitolách. Historicky provedl tuto konstrukci Rus Kolmogorov v 20 – tých letech minulého století. Proto se tento přístup někdy nazývá Kolmogorovova abstraktní pravděpodobnost. Takto vytvořená abstraktní teorie již nemusí nutně pracovat s konečnými množinami a také pojem pravděpodobnosti je možno značně rozšířit. Nejdříve vymezíme podobně jako v části 1.5.1 základní množinu.
Definice 1.5.2.1
Nechť Ω ≠∅. Potom tuto množinu nazveme **základní množinou**.
Definice 1.5.2.2
Nechť Ω je základní množina. Potom systém množin $\mathcal{A}$, splňující následující vlastnosti :

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$ (neprázdnost systému $\mathcal{A}$)

b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (vlastnost doplňku)

c) Nechť $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou prvky systému $\mathcal{A}$ po dvou neslučitelné ($A_i \cap A_j = \emptyset$, kdykoli $i \neq j$) potom také $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (vlastnost aditivity),

se nazývá ***σ* - algebra** založená na množině Ω.

Příklad .

1. Nejužší σ - algebrou na množině Ω je $\mathcal{A} = \{ \emptyset , \Omega \}$
2. Nejširší σ - algebrou na množině Ω je $\mathcal{A}$ = **exp**(Ω).
3. Dokažte následující tvrzení : Nechť **S** je libovolný systém podmnožin na Ω , potom existuje **právě jedna** σ - algebra na množině Ω, která obsahuje **S** a je nejmenší ve smyslu inkluze.
4. Na základě platnosti předchozího tvrzení je možno provést konstrukci σ - algebry na množině $\Omega = \mathbb{R}_1$ ($\Omega = \mathbb{R}_N$), kde za množinu **S** z předchozího tvrzení vezmeme množinu všech otevřených intervalů v $\mathbb{R}_1$ (resp. jejich součinů v $\mathbb{R}_N$). Tato σ - algebra hraje velkou roli v teorii integrálu a míry, ale také v teorii pravděpodobnosti. Nazývá se **Borelova *σ*-algebra**. Každý její prvek je potom nazýván **Borelovskou množinou**.
5.

Poznámka 1.5.2.1

Pokud je splněna předcházející podmínka c) jen pro konečné množiny , nazývá se takový systém množin **konečná algebra**.

Definice 1.5.2.3

Nechť Ω je základní množina, $\mathcal{A}$ je σ - algebra založená na množině Ω. Potom tento systém $\mathcal{A}$ nazveme **množinou náhodných jevů** na množině Ω.

Tvrzení 1.5.2.1

Nechť $\mathcal{A}$ je množina náhodných jevů na Ω. Potom :

a) Nechť $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou prvky $\mathcal{A}$, potom také $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

b) Nechť A, B $\in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Důkaz:

a) Na základě d'Morganových zákonů platí : $\Omega \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_i)$; na základě pravidla o doplňku a pravidla o aditivitě z definice 1.5.2.2 je $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

b) $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$, podle předchozí části je výsledek průniku prvkem $\mathcal{A}$.

Definice 1.5.2.4

Nechť Ω je základní množina, $\mathcal{A}$ je σ - algebra založená na množině Ω. Potom **pravděpodobností** na množině Ω nazveme zobrazení $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbf{R}_1$ s následujícími vlastnostmi :

a) $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$ (nenulovost aspoň na jednom prvku $\mathcal{A}$)

b) $0 \leq P(A) \leq 1$, pro všechna $A \in \mathcal{A}$ (omezenost pravděpodobnosti)

c) Jestliže $\{ A_i \}$ je spočetný systém po dvou disjunktních (neslučitelné náhodné jevy) množin , potom $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$ (σ - aditivita).

Trojici (Ω , $\mathcal{A}$, **P**) budeme nazývat ***pravděpodobnostním prostorem*** .

Uveďme dále příklady některých pravděpodobnostních prostorů:

I. **Ω** konečná množina , $\mathcal{A}$ = exp (Ω) (množina všech podmnožin množiny Ω), $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$. Příklad klasické pravděpodobnosti.

II. **Ω** libovolná neprázdná množina, $\mathcal{A}$ libovolná $\boldsymbol{\sigma}$ **-** algebra na množině **Ω,** $x_0 \in \Omega$, $P(A) = \begin{cases} 1, x_0 \in A \\ 0, x_0 \notin A \end{cases}$. Takovéto pravděpodobnosti říkáme pravděpodobnost soustředěná v bodě x_0 . Tento pojem můžeme zobecnit pro případ libovolné podmnožiny množiny **Ω** , která je zároveň náhodným jevem.

III. **Ω** libovolná neprázdná množina reálných čísel $\mathbf{R_1}$, nechť je dále **Ω** měřitelná (ve smyslu např. lebesgueovské míry) s mírou kladnou. Označme symbolem $\mathcal{A}$ $\boldsymbol{\sigma}$ **-** algebru všech podmnožin množiny Ω, které jsou měřitelné. Definujme pravděpodobnost na množině **Ω** jako $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde μ(.) je daná míra.

Tvrzení 1.5.2.2 (o vlastnostech pravděpodobnosti na (Ω , $\mathcal{A}$, **P**))

Nechť A, B ∈ $\mathcal{A}$. Potom platí :

1. P(A) + P(B) = P(A ∪ B) + P(A ∩ B) (1.11)
(**subaditivita pravděpodobnosti**)

2. P(**Ω** \ A) = 1 – P(A) (1.12)
(**chování vzhledem k doplňku**)

Nechť A, B ∈ $\mathcal{A}$ a B ⊂ A . Potom

3. P(A) = P(B) – P (A \ B) (1.13)

4. P(B) ≤ P(A) (1.14)
(**monotónie pravděpodobnosti**)

Nechť A_n , $B_n \in \mathcal{A}$, dále nechť platí $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \supseteq B_{n+1}$(n=1,2,…). Potom platí

5. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ (**polospojitost zdola**) (1.15)

6. $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$ (**polospojitost shora**) (1.16)

Důkaz:

1. Množinu **A** můžeme napsat jako sjednocení disjunktních množin takto **A** = (**A** \ **B**) ∪ (**A** ∩ **B**), podobně pro množinu **B** = (**B** \ **A**) ∪ (**A** ∩ **B**). Podle vlastnosti **c**) z definice **1.5.2.4** je **P(A)** = P(**A** \ **B**) + **P(A** ∩ **B**) , dále také **P(B)** = P(**B** \ **A**) + **P(A** ∩ **B**). **A** ∪ **B = (A** \ **B**) ∪ (**A** ∩ **B**) ∪ (**B** \ **A**) , všechny množiny jsou po dvou disjunktní, použijeme – li ještě jednou výše uvedenou vlastnost je **P(A** ∪ **B)= P(A** \ **B**) + **P(** **A** ∩ **B**) + **P(B** \ **A**). Složením všech uvedených vztahů získáváme (1.11).

2. Tento vztah vyplývá z **1.** volbou **A, B = Ω** \ A. Po dosazení přímo do (1.11) získáme přímo vztah (1.12).

3. Provedeme opět rozklad množiny **A** na disjunktní podmnožiny , **A** = (**A** \ **B**) ∪ **B.** Proto platí **P(A)** = P(**A** \ **B**) + **P(B)** , tedy platí (1.13).

4. Protože nutně platí P(**A** \ **B**) ≥ 0 , vyplývá z (1.13) přímo vztah (1.14)

5. Podobně jako v předchozích částech tvrzení se pokusíme převést obecné sjednocení množin $\mathbf{A_n}$ na sjednocení množin po dvou disjunktních a použijeme vlastnost **c)** a předchozí dokázané vztahy . Tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$ $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_3 \setminus A_2) + \ldots,$ vzhledem k vlastnosti (1.13) platí $\mathbf{P(\ A_{n+1} \setminus A_n\ ) = P(A_{n+1}) - P(A_n)}$. Dosadíme – li tedy tento vtah do výše uvedené rovnosti je $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}(P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + \ldots + P(A_{n+1}) - P(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1})$.

6. Vztah (1.16) dokážeme přímo z předchozí části , protože **Ω** \ B_n ⊆ **Ω** \ B_{n+1} a dále je

$$P(\bigcap_n B_n) = P(\Omega \setminus (\bigcup_n (\Omega \setminus B_n))) = 1 - P(\bigcup_n (\Omega \setminus B_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\Omega \setminus B_n) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}(1 - P(B_n)) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) .$$