3. Charakteristiky a parametry náhodných veličin

Úkolem této kapitoly je zavést pomocný aparát , kterým budeme dále popisovat pomocí jednoduchých prostředků náhodné veličiny. Takovýmto aparátem jsou tzv. parametry nebo charakteristiky náhodné veličiny. Obecně je dělíme na parametry polohy a parametry variability.

3.1 Medián a kvantily

Definice 3.1

Nechť **X** je náhodná veličina a **F** je její distribuční funkce. **100p% kvantilem** této náhodné veličiny nazveme číslo x_p takové, že pro dané $p \in (0 , 1)$ je

$$F(x_p) \le p \;\wedge\; \lim_{x \to x_p^+} F(x) \ge p . \qquad (3.1)$$

Některé kvantily mají speciální označení:

$\tilde{x} = x_{0,5}$ .... medián – 50% kvantil

$x_{0,25}$ .... dolní kvartil – 25% kvantil

$x_{0,75}$. .... horní kvartil – 75% kvantil

$x_{\frac{k}{10}}, \quad k = 1,2,...,9$ .... k – tý decil

$x_{\frac{k}{100}}, \quad k = 1,2,...,99$ .... k – tý percentil

Poznámka 3.1

Předchozí charakteristiku budeme využívat především v matematické statistice.

Příklad.

Nechť **X** je náhodná veličina typu Bi(30;0,4). Jde tedy o binomické rozdělení s parametry n=30 a p=0,4. Podle předchozí části můžeme zjistit jednotlivé kvantily:

Kvantily

10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
9	10	11	11	12	13	13	14	15

Dolní kvartil je v tomto případě 10 a horní kvartil je 14.

Příklad .

Zjistěme hodnoty příslušných kvantilů rozdělení N(0,1).

5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%
-1,64	-1,28	-1,04	-0,84	-0,67	-0,52	-0,39	-0,25	-0,13	0,00	0,13	0,25	0,39	0,52	0,67	0,84	1,04	1,28	1,64

3.2 Modus

Definice 3.2

Nechť **X** je **diskrétní náhodná veličina**. Potom bod $\hat{x}$ nazveme modusem náhodné veličiny **X** , jestliže pro něj platí

$$P(X = \hat{x}) \ge P(X = y), \quad y \ne \hat{x} . \qquad (3.2)$$

Nechť **X** je **spojitá náhodná veličina** s hustotou **f** . Potom bod $\hat{x}$ nazveme modulem náhodné veličiny **X** , jestliže pro něj platí

$$f(\hat{x}) \ge f(x), \qquad x \ne \hat{x} . \qquad (3.3)$$

V případě diskrétní náhodné veličiny je modusem nejčetnější hodnota, v případě spojité náhodné veličiny hodnota ,v níž je hustota maximální. V případě , že takovéto možnosti nastávají ve více než v jednom bodě , jsou všechny takové body prohlášeny modusem náhodné veličiny **X**.

Příklad

Modusem náhodné veličiny **N(0,1)** je hodnota 0, neboť v této hodnotě nabývá hustota náhodné veličiny maximum $\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}$.

Modusem náhodné veličiny Bi(10;0,7) je nejčetnější hodnota tedy modus je roven 7.

3.3 Střední hodnota náhodné veličiny

Tento parametr je jeden z nejdůležitějších parametrů, má velké využití v statistických studiích, proto se jím budeme zabývat obšírněji.

Definice 3.3

Nechť **X** je náhodná veličina. Řekneme , že tato náhodná veličina má střední hodnotu **E(X)** , jestliže absolutně konverguje řada resp. existuje integrál:

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} x_i.P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i.p_i, & \textit{diskrétní náhodná veličina}\\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx, & \textit{spojitá náhodná veličina}\end{cases} \qquad .(3.4)$$

Konvergence řady resp. existence integrálu v (3.4) je podstatná!

Věta 3.1

Vlastnosti střední hodnoty náhodné veličiny

1. Nechť **X** je náhodná veličina typu konstanta **k**. Potom její střední hodnota E(X) existuje a je rovna hodnotě **k**.
2. Nechť **X** je náhodná veličina , c > 0. Nechť dále existuje E(X) . Potom náhodná veličina **c.X** má střední hodnotu **c . E(X)**
3. Nechť **X** je náhodná veličina , nechť dále **X** ≥ 0 . Potom E(X) ≥ 0.
4. Nechť **X , Y** jsou náhodné veličiny , nechť existuje E(X) a E(Y). Potom má náhodná veličina **X + Y** střední hodnotu E(X) + E(Y) .

Důkaz:

1. Protože náhodná veličina je konstanta, platí P(X=k) = 1. Tedy existuje jistě i součet (3.4) a je roven E(X) = k . 1 = k
2. Jistě tvrzení platí pro případ c=0. Nechť tedy c ≠ 0. Vyšetřujme nejdříve případ diskrétní náhodné veličiny:

   a) Náhodná veličina nabývá postupně hodnoty x_1 , x_2 , …s pravděpodobnostmi p_1 , p_2 , …. Tedy náhodná veličina **c.X** nabývá hodnoty $c.x_1$, $c.x_2$, … s pravděpodobnostmi p_1 , p_2, …Protože řada $\sum_i x_i.p_i$ konverguje absolutně právě když konverguje řada $\sum_i c.x_i.p_i = c.\sum_i x_i.p_i$ a dále

   $$E(c.X)=\sum_i (c.x_i).p_i = c.\sum_i x_i.p_i = c.E(X)$$

   b) Spojitá náhodná veličina , c>0. Nechť **F** je distribuční funkce náhodná veličina X a **f** je její hustota. Nechť **G** je distribuční funkce náhodné veličiny c.X a g je její hustota. Potom platí

   $$G(x)=P(c.X<x)=P(X<\frac{x}{c})=\int_{-\infty}^{\frac{x}{c}} f(t)dt = F(\frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{x} f(\frac{y}{c})dy . \qquad (3.5)$$

Ze vztahu (3.5) jsou vidět rovnosti $G(x) = F(\frac{x}{c}) \wedge \quad g(x) = f\left(\frac{x}{c}\right).\frac{1}{c}$. Tedy dále

$$E(c.X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f\left(\frac{x}{c}\right).\frac{1}{c}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c.v.f(v).cdv = c\int_{-\infty}^{+\infty} v.f(v)dv = c.E(X).$$

Nechť c<0 potom platí

$$G(x) = P(c.X < x) = P\left(X > \frac{x}{c}\right) = 1 - P\left(X \le \frac{x}{c}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{x}{c}} f(t)dt = \int_{\frac{x}{c}}^{+\infty} f(t)dt =$$

$$= \int_{x}^{-\infty} f\left(\frac{v}{c}\right).\frac{1}{c}dv = \int_{-\infty}^{x} (-1).\frac{1}{c}.f\left(\frac{v}{c}\right)dv, \tag{3.6}$$

Ze vztahu (3.6) jsou vidět rovnosti $G(x) = 1 - F\left(\frac{x}{c}\right) \wedge g(x) = (-1).\frac{1}{c}.f\left(\frac{x}{c}\right)$. Tedy

$$E(c.X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\left(\frac{-1}{c}.f\left(\frac{x}{c}\right)\right)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} c.v.\left(\frac{-1}{c}.f(v)\right).cdv = c.\int_{-\infty}^{+\infty} v.f(v)dv = c.E(X).$$

3. Důkaz provedeme opět samostatně pro diskrétní a spojité náhodné veličiny. Nechť tedy **X** je diskrétní náhodná veličina , která nabývá hodnoty x_1, x_2, …s pravděpodobnostmi p_1, p_2, …, protože X≥0 jsou i hodnoty x_i nezáporné. Tedy $E(X) = \sum_i x_i.p_i \ge 0$. Nechť je dále X náhodná veličina spojitá s hustotou f, podle podmínek platí $P(X < 0) = 0 = F(0) = \int_{-\infty}^{0} x.f(x)dx = \int_{.\infty}^{0} x.0dx$. Tedy hustota náhodné veličiny X je na množině záporných čísel rovna nule. Odtud tedy $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} t.f(t)dt \ge 0$, neboť hustota f je nezáporná podle věty 2.8.
4. Důkaz tohoto tvrzení je uveden v monografii [2].

Q.E.D.

Poznámka 3.1

Vlastnost 2. v předchozí větě se obecně nazývá homogenita, vlastnost 4. aditivita, dohromady tyto dvě vlastnosti nazýváme linearitou. Vlastnost 3. se nazývá nezápornost zobrazení. Každé zobrazení do prostoru $\mathcal{R}_1$ nazýváme obecně funkcionářem. Střední hodnota jako zobrazení $E : \mathcal{N} \to \mathcal{R}_1$,$\mathcal{N}$ je prostor náhodných veličin, je tedy lineární a nezáporný funkcionář na množině náhodných veličin, které mají střední hodnotu.

Poznámka 3.2

V předchozí větě jsme se omezili jen na případ spojitého a diskrétního rozdělení. Naznačíme dále, jak bychom mohli sjednotit pojem diskrétního a spojitého rozdělení v jeden pojem. Nejdříve připomeňme funkci χ_A - charakteristická funkce množiny A, definovanou následujícím předpisem:

$$\chi_A : x \mapsto \begin{cases} 0, x \notin A \\ 1, x \in A \end{cases} \tag{3.7}$$

Všimněme si , že χ_A je pro A ∈ $\mathcal{A}$ náhodnou veličinou. Jestliže vytvoříme $X = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i.\chi_{A_i}$, { A_i } je úplný rozklad množiny Ω , $A_i \in \mathcal{A}$, pro všechny indexy i, pak můžeme o takto definované náhodné veličině hovořit jako o spojité náhodné veličině. Přesný postup je uveden v monografii [2] nebo v [1].

Věta 3.2

Zobecněné vlastnosti střední hodnoty

Nechť **E** je střední hodnota definovaná v definici 3.3. Potom je **E** nezáporný , lineární funkcionář na $\mathfrak{A}$. Navíc je spojitý zdola a shora tj.

$$X_n, X \in, X_n \searrow X (X_n \nearrow X) \Rightarrow$$
$$E(X_n) \searrow E(X) \big(E(X_n) \nearrow E(X)\big)$$

Důkaz:

Vlastnosti platí samozřejmě za předpokladu existence střední hodnoty . Nezápornost a linearita vyplývají z věty 3.1. Budeme dále dokazovat spojitost zdola a shora. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $X_n \searrow 0, \quad m = \max\{X_1\}$. Potom platí pro všechna n $\in\mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0 \quad : 0 \le X_n \le m.\chi_{[X_n \ge \varepsilon]} + \varepsilon$. Podle vlastnosti nezápornosti střední hodnoty je $0 \le E(X_n) \le E\left(m.\chi_{[X_n \ge \varepsilon]} + \varepsilon\right) = m.P\left(X_n \ge \varepsilon\right) + \varepsilon$, ale $P\left(X_n \ge \varepsilon\right) \to 0, protože \quad X_n \searrow 0.$ Z předchozího vyplývá, že $E\left(X_n\right) \searrow 0$. Odtud již vyplývají obě tvrzení. Při důkazu jsme využili tvrzení, že pro A $\in \mathfrak{A}$ je $\chi_A = P(A)$. Dokažte jej.

Q.E.D.

Příklady na stanovení středních hodnot náhodných veličin uvedeme v další kapitole. Bez důkazu uvedeme důležité tvrzení.

Věta 3.3

Nechť **X** je náhodná veličina a g:$\mathbb{R}_1$ ->$\mathbb{R}_1$ je spojitá funkce. Potom g $\circ$ X je náhodná veličina, která má střední hodnotu právě , když existuje integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(t)\right|.f(t)dt.$ Dále je $E(g \circ X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t).f(t)dt$.

Důkaz:

Proveden například v [1],[2].

3.4 Rozptyl náhodné veličiny

Definice 3.4

Nechť **X** je náhodná veličina , pro kterou existuje střední hodnota. Jestliže má náhodná veličina $(X – E(X))^2$ střední hodnotu , potom

$$VAR(X) = E(X - E(X))^2 \qquad (3.8)$$

nazveme **rozptylem** náhodná veličina **X**. Číslo $\sigma\left(X\right) = \sqrt{VAR(X)}$ se nazývá **směrodatná odchylka** náhodná veličina **X**.

Věta 3.4

Vlastnosti rozptylu náhodné veličiny

Nechť náhodná veličina **X** má rozptyl VAR(X). Potom:

1. $VAR(X) = E(X^2) – (E(X))^2$ (3.9)
2. Nechť dále a $\in \mathbb{R}_1$, potom
   $VAR(a . X) = a^2 . VAR(X)$ (3.10)

3. Nechť b $\in \mathbb{R}_1$, potom
VAR(X + b) = VAR(X) (3.11)

Důkaz:

1. $VAR(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)=E\left(X^2-2.X.E(X)+\left(E(X)\right)^2\right)=E(X^2)-$

$-E\left(2.X.E(X)\right)+E\left(\left(E(X)\right)^2\right)=E\left(X^2\right)-2.E(X).E(X)+\left(E(X)\right)^2=$

$=E\left(X^2\right)-2.\left(E(X)\right)^2+\left(E(X)\right)^2=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$, při důkazu jsme využili linearitu střední hodnoty , uvedenou ve větě 3.1.

2. Jestliže existuje VAR(X) , potom musí existovat také VAR(a.X). Podle předchozí části stačí zjistit ověřit existenci $E(a.X)$ a $E\left(\left(a.X\right)^2\right)$, ale tyto střední hodnoty existují vzhledem k vlastnostem střední hodnoty a existenci $E(X)$ a $E\left(X^2\right)$.
Využijeme dále vztah (3.9) a je

$VAR(a.X)=E\left(\left(a.X\right)^2\right)-\left(E\left(a.X\right)\right)^2=E\left(a^2.X^2\right)-\left(a.E\left(X\right)\right)^2=$

$=a^2.E\left(X^2\right)-a^2.\left(E\left(X\right)\right)^2=a^2.\left(E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right)=a^2.VAR(X)$

3. Podobně jako v předchozí části, jestliže existuje VAR(X) , potom existuje i VAR(X+b). Proveďme výpočet VAR(X+b) přímo podle definice (3.8):

$VAR(X+b)=E\left(\left(\left(X+b\right)-E\left(X+b\right)\right)^2\right)=E\left(X+b-E\left(X\right)-b\right)^2=$

$=E\left(X-E\left(X\right)\right)^2=VAR(X)$

Q.E.D.

Některé další vlastnosti rozptylu náhodných veličin budeme vyšetřovat v kapitole věnované nezávislosti náhodných veličin.
Uvedeme ještě některé další typy charakteristik náhodných veličin. Příklady na výpočet takovýchto čísel ponecháme na závěrečnou část této kapitoly.

3.5 Momenty náhodné veličiny

Definice 3.5

Nechť **X** je náhodná veličina , k $\in \mathbb{N}$. Potom číslo :

1. $\mu_k\left(X\right)=E\left(X^k\right)$ (3.12)

nazveme **k-tým momentem** náhodné veličiny **X**, pokud existuje.

2. $\nu_k\left(X\right)=E\left(\left(X-E\left(X\right)\right)^k\right)$ (3.13)

nazveme **k-tým centrálním momentem** náhodné veličiny **X** , jestliže uvedený výraz existuje

3. $\delta_k\left(X\right)=\dfrac{\mu_k\left(X\right)}{\left[\sigma\left(X\right)\right]^k}$ (3.14)

nazveme **k-tým normovaným momentem** náhodné veličiny **X**, mají – li všechny výrazy smysl

4. Specielně 3. normovaný moment nazýváme **koeficient šikmosti** náhodné veličiny **X**

$\alpha_3(X)=\delta_3(X)$ (3.15)

5. Specielně dále určujeme **koeficient špičatosti** náhodné veličiny **X** jako

$$\alpha_4(X) = \delta_4(X) - 3 \qquad (3.16)$$

3.6 Výpočet střední hodnoty a rozptylu některých základních typů náhodných veličin

Diskrétní náhodné veličiny

3.6.1 Degenerované rozdělení

a) $E(X) = x_0 \,.\, 1 = x_0$;
b) $VAR(X) = x_0^2.1 - (x_0)^2 = 0$

3.6.2 Alternativní rozdělení

a) $E(X) = x_1.p + x_2.(1-p),$
b) $VAR(X) = \left(x_1^2.p + x_2^2.(1-p)\right) - \left(x_1.p + x_2.(1-p)\right)^2,$

Je – li specielně $x_1 = 1$ a $x_2 = 0$ je potom

a) $E(X) = p$
b) $VAR(X) = p.(1-p) = p \,.\, q$

3.6.3 Binomické rozdělení

a) $$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i.\left(\binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i}\right) = n.p.\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}.p^{i-1}.(1-p)^{n-i} =$$
$$= n.p.\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}.p^j.(1-p)^{n-1-j} = n.p.\left(p+(1-p)\right)^{n-1} = n.p$$

b) $$VAR(X) = \sum_{i=0}^{n}\left(i-n.p\right)^2.\binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i} = n^2.p^2.1^n - 2.n.p.\sum_{i=0}^{n} i.\binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i} +$$
$$+\sum_{i=0}^{n} i^2.\binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i} = n^2.p^2 - 2.n^2.p^2 + n.p + \sum_{i=2}^{n}\frac{n!}{(i-2)!.(n-i)!}.p^i.(1-p)^{n-i} =$$
$$= n.p - n^2.p^2 + n.(n-1).p^2.\sum_{i=2}^{n-2}\binom{n-2}{i-2}.p^{i-2}.(1-p)^{(n-2)-(i-2)} = n.p - n.p^2 = n.p.(1-p) = n.p.q$$

3.6.4 Poissonovo rozdělení

a) $$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i.\frac{\lambda^i.e^{-\lambda}}{i!} = \lambda.e^{-\lambda}.\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\right) = \lambda.e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda$$

b) $$VAR(X) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(i-\lambda\right)^2.\frac{\lambda^i.e^{-\lambda}}{i!} = \lambda^2.\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i.e^{-\lambda}}{i!} - 2.\lambda.\sum_{i=0}^{\infty} i.\frac{\lambda^i.e^{-\lambda}}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} i^2.\frac{\lambda^i.e^{-\lambda}}{i!} =$$
$$= \lambda^2 - 2.\lambda^2 + e^{-\lambda}.\lambda.\left(\sum_{i=1}^{\infty} i.\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\right) = \lambda^2 - 2.\lambda^2 + e^{-\lambda}.\lambda.\left(\sum_{i=1}^{\infty}(j+1).\frac{\lambda^j}{j!}\right) =$$

$$= \lambda^2 - 2.\lambda^2 + e^{-\lambda}.\lambda.\left(\lambda.e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) = \lambda^2 - 2.\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda = \lambda$$

3.6.5 Rovnoměrné rozdělení

a) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_a^b x.\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$

b) $VAR(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx\right)^2=\int_a^b x^2.\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$

$=\frac{1}{3}.\left(a^2+a.b+b^2\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2-a.b+b^2}{12}$

3.6.6 Cauchyho rozdělení

a) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{1}{\pi^2}.\frac{a}{a^2+x^2}dx,$ posledně psaný integrál ale neexistuje . Proto neexistuje ani střední hodnota tohoto rozdělení

b) Protože neexistuje střední hodnota , nemůže existovat ani rozptyl.

3.6.7 Normální rozdělení

a)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2.\sigma^2}}dx=\begin{matrix} substituce \\ \frac{x-\mu}{\sigma}=t \end{matrix}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma.t+\mu).\frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}.\sigma dt=$$

$$=\sigma.\int_{-\infty}^{+\infty} t.\frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}.\sigma dt+\mu.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}.\sigma dt=0+\mu.1=\mu$$

b) $VAR(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2.f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2.\frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2.\sigma^2}}dx=\begin{matrix} substituce \\ \frac{x-\mu}{\sigma}=t \end{matrix}=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma.t^2.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}.\sigma dt=\sigma^2.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\left\{\lim_{N\to\infty}\left[-t.e^{-\frac{t^2}{2}}\right]+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}=\sigma^2.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\left\{0+\sqrt{2.\pi}\right\}=$$

$=\sigma^2$

Je zřejmé , že střední hodnota rozdělení N(0,1) je tedy rovna 0 a rozptyl tohoto rozdělení je roven 1.

3.7 Smíšené momenty náhodných veličin

V této části se zaměříme na případy, kdy je nutno vyšetřovat více náhodných veličin, které jsou spolu spojené v náhodném vektoru buď pomocí sdružené hustoty nebo pomocí sdružené pravděpodobnostní funkce.

Definice 3.6

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor. Nechť dále $X_1^{r_1}.X_2^{r_2},\ldots,X_n^{r_n}$, kde $r_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$, je náhodná veličina , která má střední hodnotu. Potom **smíšeným momentem r – tého řádu** náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazveme hodnotu $E\left(X_1^{r_1}.X_2^{r_2},\ldots,X_n^{r_n}\right)$.

Poznámka 3.3

a) V případě , že náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je diskrétní se sdruženou pravděpodobnostní funkcí **P** , hodnota smíšeného momentu r – tého řádu rovna :

$$E\left(X_1^{r_1}.X_2^{r_2},\ldots,X_n^{r_n}\right) = \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} x_1^{r_1}.x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}.P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \quad (3.17)$$

v uvedeném součtu sčítáme samozřejmě přes všechny možné n – tice, v nichž je sdružená pravděpodobnostní funkce nenulová.

b) V případě , že náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je spojitý se sdruženou hustotou **f** , je hodnota smíšeného momentu r – tého řádu rovna :

$$E\left(X_1^{r_1}.X_2^{r_2},\ldots,X_n^{r_n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{r_1}.x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}.f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n \quad (3.18).$$

Sdružené momenty náhodných veličin budeme vyšetřovat především v situacích, kdy je nutné zkoumat vliv jednotlivých náhodných veličin (prvků náhodného vektoru) na sebe. Toto zkoumání budeme provádět především v následující kapitole a potom dále v matematické statistice.

Bez důkazu nyní uvedeme dvě věty, které nám dávají potencionálně možnost počítat nejen výše uvedené smíšené momenty, ale zároveň odůvodňují způsob výpočtů některých obecných charakteristik náhodných veličin.

Věta 3.5

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je spojitý náhodný vektor se sdruženou distribuční funkcí $\mathbb{F}$ a sdruženou hustotou **f** . Nechť $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_1$ je borelovská funkce. Potom $g \circ \mathbb{X}$ je náhodná veličina právě tehdy, když je integrovatelný součin f . g . Přitom dále platí

$$E\left(g \circ \mathbb{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(u_1,\ldots,u_n\right).f(u_1,\ldots,u_n)du_1\ldots du_n \quad (3.19)$$

Věta 3.6

Nechť **X** je spojitá náhodná veličina s hustotou **f** . Nechť dále je g spojitá reálná funkce. Potom

$$E\left(g \circ X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f(x)dx \quad (3.20)$$

Oba důkazy jsou uvedeny např. v [2] věta 10.4.7.