7. Konvergence na pravděpodobnostním prostoru

V této kapitole se budeme zabývat zavedením konvergence na {Ω, 𝔄, P} - pravděpodobnostním prostoru. Budeme studovat vlastnosti vybraných druhů konvergence, jejich vlastnosti , omezení a způsoby využití především při studiu zákonů velkých čísel a centrálních limitních vět.

7.1 Konvergence v distribuci

Přirozený způsob zavedení konvergence náhodných veličin založený na bodové konvergenci distribučních funkcí .

Definice 7.1

Nechť **X, X₁ , X₂, …** jsou náhodné veličiny a k nim příslušné distribuční funkce nechť jsou **F , F₁ , F₂, ….** Řekneme , že posloupnost { $\mathbf{X_n}$ } náhodných veličin **konverguje v distribuci** k náhodné veličině **X** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ ve všech bodech **x** spojitosti funkce **F**. Tento vztah zapisujeme takto : $X_n \overset{D}{\to} X$.

Velmi důležitá pro vyšetřování daného typu konvergence je následující věta.

Věta 7.2

1. $X_n \overset{D}{\to} X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\left(f\left(X_n\right)\right) = E\left(f\left(X\right)\right),$ *pro f spojité zobrazení na* $\mathbb{R}_1$

2. $X_n \overset{D}{\to} X \Leftrightarrow \varphi_n(t) \to \varphi(t),\ t \in \mathbb{R}_1$ a $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, ...$ jsou charakteristické funkce náhodných veličin **X , X₁ , X₂ , …**

3. $X_n \overset{D}{\to} X\ ,\ Y_n \overset{D}{\to} Y \Rightarrow\ X_n + Y_n \overset{D}{\to} X + Y$

4. $X_n \overset{D}{\to} X\ ,\ X_n \overset{D}{\to} Y \Rightarrow\ X = Y$

Důkaz:

Nebudeme provádět , protože se vymyká obsahu tohoto textu. Celkově je uveden v část IV. V [1].

Poznámka 7.3

Podobně můžeme definovat konvergenci v distribuci pro náhodné vektory a to po složkách.

Příklad 7.4

Nechť { X_n } je posloupnost náhodných veličin typu **N(0,1)**. Nechť dále je $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}}$. Potom $Y_n \overset{D}{\to} N(0,1)$. Důkaz provedeme pomocí části 2. ve větě 7.2. Nejdříve zjistíme charakteristickou funkci φ_n náhodné veličiny Y_n. Podle věty 6.5 má náhodné veličina X_n charakteristickou funkci rovnou $\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, tedy podle věty 6.3 je $\varphi_{Y_n}(t) = e^{-n.\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Všechny charakteristické funkce Y_n jsou shodné a jsou rovny charakteristické funkci **N(0,1).** Tedy $Y_n \overset{D}{\to} N(0,1)$.

Příklad 7.5

Nechť { X_n } je posloupnost náhodných veličin typu **N(*μ*,*σ*²)**. Nechť dále je $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.\mu}{\sigma.\sqrt{n}}$, potom $Y_n \xrightarrow{D} N(0,1)$. Nejdříve podle věty 6.5 nalezneme charakteristickou funkci $\varphi_{X_n}(t) = e^{i.t.\mu}.e^{-\frac{(t.\sigma)^2}{2}}$, charakteristická funkce náhodné veličiny $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ je rovna $\varphi_{Z_n}(t) = e^{i.n.t.\mu}.e^{-n.\frac{(t.\sigma)^2}{2}}$, tedy podle věty 6.3 je $\varphi_{Y_n}(t) = e^{-i.t.\sqrt{n}.\frac{\mu}{\sigma}}.e^{i.n.\frac{1}{\sigma.\sqrt{n}}.\mu}.e^{-n.\frac{\left(\frac{t}{\sigma.\sqrt{n}}\right)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$, tedy opět $Y_n \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Příklad 7.6

Nechť { X_n } je posloupnost náhodných veličin typu X_n ~ **N(*μ*ₙ ,*σ*ₙ²)**. Nechť dále je, $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$ potom $Y_n \xrightarrow{D} N(0,1)$. Dokažte sami stejnou metodou jako v předchozím!

Příklad 7.7

Nechť { X_n } je posloupnost náhodných veličin typu X_n ~ **Po(λₙ)** Nechť dále je $Y_n = \dfrac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}, n = 1,2,...$, potom $Y_n \xrightarrow{D} N(0,1)$. Podle (6.8) je charakteristická funkce X_n rovna $\varphi_{X_n}(t) = e^{\lambda_n \cdot \left(e^{i.t}-1\right)}$, k dalšímu výpočtu použijeme opět věty 6.3 , tím získáme vztah pro charakteristickou funkci **Yₙ** . $\varphi_{Y_n}(t) = e^{-i.\sqrt{\lambda_n}.t}.e^{\lambda_n \cdot \left(e^{i.\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}}-1\right)} = e^{\lambda_n \cdot \left(e^{i.\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}}-1-\frac{i.t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)}$, ukážeme , že tato charakteristické funkce konverguje k charakteristické funkci **N(0,1)**. Proto stačí dokázat , že $\lambda_n.\left(e^{i.\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}} - 1 - \frac{i.t}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{t^2}{2.\lambda_n}\right) \to 0$, ale podle (6.9) platí odhad:

$$\lambda_n.\left|\left(e^{i.\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}} - 1 - \frac{i.t}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{t^2}{2.\lambda_n}\right)\right| \le \frac{\lambda_n.|t|^3}{6.\sqrt{\lambda_n^3}} = \frac{|t|^3}{6.\sqrt{\lambda_n}},$$

protože pro $n \to +\infty$ je $\dfrac{|t|^3}{6.\sqrt{\lambda_n}} \to 0$. Odtud je tedy $Y_n \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Příklad 7.8

Nechť { X_n } je posloupnost náhodných veličin typu **A(p)** (alternativní rozdělení s parametrem p) . Nechť dále je $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.\mu}{\sigma.\sqrt{n}}$, potom $Y_n \xrightarrow{D} N(0,1)$. Dokažte sami, uvědomte si , že náhodná veličina $\sum_{i=1}^{n} X_i$ je typu binomické rozdělení s parametry (n,p). K výpočtu dále využijte vztahu (6.3) a (6.7) a větu 6.3.

7.2 Konvergence skoro jistě

Definice 7.9

Nechť { X_n } je posloupnost náhodných veličin. Řekneme, že posloupnost { X_n } **konverguje skoro jistě** k náhodné veličině **X** , jestliže existuje množina $A \in \mathfrak{A}$, P(A) = 1 taková , že existuje konečná $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega), \omega \in A$ a je $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Tento způsob konvergence budeme označovat $X_n \xrightarrow{s.j.} X$.

Následující věta dává ekvivalentní definici konvergence skoro jistě a zároveň je posouzena jednoznačnost konvergence.

Věta 7.10

1. Nechť **X** je náhodná veličina a { X_n } je posloupnost náhodných veličin. Potom

$$X_n \xrightarrow{s.j.} X \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\omega; \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \left[\left|X_n(\omega) - X(\omega)\right| \le \varepsilon\right]\right) = 1$$

2. Jsou – li **X** , **Y** náhodné veličiny takové , že $X_n \xrightarrow{s.j.} X, X_n \xrightarrow{s.j.} Y \Rightarrow X = Y$

Důkaz:

1. Podle definice 7.9 je

$$A = \left(\omega; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = \left(\omega; \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \left[\left|X_n(\omega) - X(\omega)\right| \le \varepsilon\right]\right)$$ a navíc P(A)=1

2. $(\omega; X(\omega) = Y(\omega)) \supset \left(\omega; \lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) \cap \left(\omega; \lim_{n\to+\infty} X_n = Y\right) = C$, avšak podle definice konvergence s.j.7.9 je jev C jistý tedy P(C) = 1

Q.E.D.

Další věta umožňuje porovnání navzájem různých způsobů konvergence.

Věta 7.11

Jegorovova

Nechť **X, X_1 , X_2, …** jsou náhodné veličiny. Potom $X_n \xrightarrow{s.j.} X$ právě tehdy , když pro každé ε > 0 existuje množina $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, P(A_ε) > 1-ε a $X_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} X$ na A_ε .

Důkaz:

a) Nejdříve dokážeme implikaci zprava doleva. Použijeme – li označení ze znění věty je $\left\{\omega; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} \supset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{\frac{1}{n}} = A$ a jistě P(A) = 1.

b) Budeme dokazovat opačnou implikaci. Potom podle definice je :

$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\{n_i\}\subset\mathbb{N}}{\exists} \; ; \quad P\left(\bigcap_{n\ge n_i}\left[|X_n - X| \le \frac{1}{i}\right]\right) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2^i}$. Tento výrok vyplývá ze spojitosti zdola pravděpodobnosti viz (1.15). Zvolíme potom

$A_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{+\infty}\bigcap_{n=n_i}^{+\infty}\left[|X_n - X| \le \frac{1}{i}\right]$. Označme $A_n^i = \left\{\omega; \underset{m\ge n}{\forall} |X_m(\omega) - X(\omega)| \le \frac{1}{i}\right\}$

Potom platí:

a) $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n^i = A \quad a \quad P(A) = 1$

b) $A_n^i \subset A_{n+1}^i$

c) $\underset{j\in N}{\forall} \; \underset{n_j\in N}{\exists} \quad P\left(A_{n_j}\right) > P(A) - \frac{\varepsilon}{2^j}$

d) $\overline{A_\varepsilon} = \Omega \;\setminus\; \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=n_i}^{\infty}\left[|X_n - X| \le \frac{1}{i}\right] = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\Omega \;\setminus\; \bigcap_{n=n_i}^{\infty}\left[|X_n - X| \le \frac{1}{i}\right]\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_{n_i}^i}$

e) $P\left(\overline{A_\varepsilon}\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\overline{A_{n_i}^i}\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$, protože $P\left(A_{n_i}^i\right) \ge P(A) - \frac{\varepsilon}{2^i}$

Q.E.D.

Velmi důležitá je následující věta , která dokazuje zaměnitelnost pojmu spojitosti a konvergence skoro jistě.

Věta 7.12

Nechť { X_n } je posloupnost náhodných veličin , nechť dále je $X_n \xrightarrow{s.j.} X$, kde X je náhodná veličina. Nechť dále je $f : R_1 \to R_1$ je spojitá funkce. Potom také platí $f \circ X_n \xrightarrow{s.j.} f \circ X$.

Důkaz:

Protože je f spojitá reálná funkce platí

$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists}; \quad |t_n - t| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t_n) - f(t)| < \varepsilon$, tedy také je

$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta(\varepsilon)>0}{\exists}; \quad |X_n - X| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(X_n) - f(X)| < \varepsilon$. Podle věty 7.10 část 1 je

$$P\left(\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left[|X_n - X| \le \varepsilon\right]\right) = 1 = P\left(\bigcap_{\delta(\varepsilon)>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left[|X_n - X| \le \varepsilon\right]\right) \quad \Rightarrow$$

$P\left(\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left[\left|f(X_n)-f(X)\right|\le\varepsilon\right]\right)=1$, neboť jednotlivý člen v posledním průniku je nadmnožinou členu v předcházejícím průniku a uvedená rovnost dále vyplývá jednoduše z monotonie pravděpodobnosti uvedené v .

Q.E.D.

Poznámka 7.13

1. Podobně jako v definici 7.9 můžeme definovat konvergenci skoro jistě pro posloupnost náhodných vektorů takto:
Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost náhodných vektorů a X je náhodný vektor , řekneme, že tato posloupnost konverguje skoro jistě k vektoru X , jestliže
$X_n=\left(X_n^1,X_n^2,\dots,X_n^k\right)\xrightarrow{s.j.}X=\left(X^1,X^2,\dots,X^k\right)\quad\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad\forall_{i=1,2,\dots,k}\; X_n^i\xrightarrow{s.j.}X^i$
2. Můžeme potom vyslovit i „vícerozměrnou" verzi věty 7.12 pro případ posloupnosti náhodných vektorů $\{X_n\}$, které konvergují skoro jistě k náhodnému vektoru X a spojité funkce $f:R_k\to R_1$.
3. Vhodnou volbou funkce f je možno dokázat, že konvergence skoro jistě je uzavřená vůči operacím sčítání náhodných veličin a násobení náhodných veličin vzhledem ke konstantám i vzhledem k sobě samým.
Důkazy těchto tvrzení jsou uvedeny v [2] , kapitola o konvergenci náhodných veličin.

7.3 Konvergence podle pravděpodobnosti

Definice 7.14

Buďte **X , X₁ , X₂ ,…** náhodné veličiny. Řekneme, že posloupnost { $\mathbf{X_n}$ } náhodných veličin **konverguje k náhodné veličině X podle pravděpodobnosti** , jestliže pro libovolné kladné ε je $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|X_n-X\right|\ge\varepsilon\right)=0$.

Tuto konvergenci budeme značit $X_n\xrightarrow{P}X$ **.**
V následující větě jsou shrnuty základní vlastnosti konvergence v pravděpodobnosti a zároveň jsou vyjádřeny vztahy k oběma již dříve definovaným konvergencím.

Věta 7.15

1. Předchozí limita existuje nejvýše jedna
2. Jestliže $X_n\xrightarrow{s.j.}X \quad\Rightarrow\quad X_n\xrightarrow{P}X$
3. Nechť $X_n\xrightarrow{P}X$. Potom existuje vybraná posloupnost $\{X_{n_i}\}$ taková , že $X_{n_i}\xrightarrow{s.j.}X$ (tzv. Rieszova věta)
4. Nechť **X , $\mathbf{X_n}$** jsou náhodné veličiny . Potom $X_n\xrightarrow{P}X$ právě tehdy , když z každé podposloupnosti $\{X_{n_i}\}$ lze vybrat podposloupnost $\{X_{n_{i_j}}\}$ takovou , že $X_{n_{i_j}}\xrightarrow{s.j.}X$

5. Buďte $X_n = \left(X_n^1, \ldots, X_n^k\right)$ a $X = \left(X^1, \ldots, X^k\right)$ náhodné vektory takové , že $X_n \xrightarrow{P} X$ (tj. konvergence je definovaná po složkách tedy pro všechna i = 1, …,k je $X_n^i \xrightarrow{P} X^i$) , nechť $f : R_k \to R_1$ spojitá funkce , potom $f \circ X_n \xrightarrow{P} f \circ X$
6. Nechť **X** , { $\mathbf{X_n}$ } jsou náhodné vektory takové , že $X_n \xrightarrow{P} X$. Potom $X_n \xrightarrow{D} X$.

Důkaz:

1. Nechť tedy $X_n \xrightarrow{P} X$ a $X_n \xrightarrow{P} Y$. Potom jistě pro X , Y , X_n a libovolné kladné platí ε platí : $P\left(|X-Y| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(|X - X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|X_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$, tedy vzhledem ke konvergenci X_n podle pravděpodobnosti k **X** , **Y** je po limitním přechodu v předchozím vztahu : $P\left(|X - Y| \geq \varepsilon\right) \leq 0 + 0 = 0$

2. Nechť tedy $X_n \xrightarrow{s.j.} X$, potom zvolíme – li ε pevné kladné reálné číslo máme z věty 7.10 část 1 (využijeme doplňkový jev) $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\left[|X_j - X| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$, vzhledem k polospojitosti zdola pravděpodobnosti .. a monotonie pravděpodobnosti platí $P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty}\left[|X_j - X| \geq \varepsilon\right]\right)$. Při limitním přechodu je v této poslední nerovnosti na pravé straně hodnota nula!
3. Vzhledem k složitosti nebudeme důkaz provádět , odkazuji na větu III.1.4 uvedenou v monografii [2]
4. Část 3 této věty řeší situaci implikace zleva doprava. Budeme tedy dále dokazovat opačnou implikaci, důkaz provedeme sporem. Jestliže není pravda, že $X_n \xrightarrow{P} X$, potom podle definice musí existovat kladné reálné číslo ε a rostoucí posloupnost přirozených čísel { i } taková , že $P\left(|X_i - X| \geq \varepsilon\right) \geq a > 0$, kde a je kladné reálné číslo. Tato vybraná posloupnost { X_i } není konvergentní k **X** podle pravděpodobnosti, tedy nemůže být podle části 1 této věty konvergentní k **X** skoro jistě.
5. Podle části 1 této věty existuje vybraná podposloupnost $\{X_{n_i}\}$ z posloupnosti $\{X_n\}$taková , že $X_{n_i} \xrightarrow{s.j.} X$, tedy podle věty 7.12 je i $f \circ X_{n_i} \xrightarrow{s.j.} f \circ X$, proto dále $f \circ X_{n_i} \xrightarrow{P} f \circ X$ a odtud tedy $f \circ X_n \xrightarrow{P} f \circ X$.
6. Důkaz tohoto tvrzení nebudeme pro jeho náročnost provádět odkazujeme opět na [2] větu III.4.9

Q.E.D.

Poznámka 7.16
Z předchozích tvrzení vyplývá, že konvergence skoro jistě je nejsilnějším typem konvergence ze tří typů , probíraných v této kapitole, konvergence podle

pravděpodobnosti je druhým nejsilnějším typem a nejslabším typem konvergence náhodných veličin nebo vektorů probíraným v této kapitole je konvergence v distribuci. Konvergence skoro jistě se někdy označuje jako **silná** a konvergence podle pravděpodobnosti jako **slabá**. Výsledky této kapitoly využijeme především u tvrzení typu zákony velkých čísel nebo centrální limitní věta probírané v následujících kapitolách.