7. týden

KVANTOVÁ STATISTIKA

Statistika je obecně vědní disciplina, která popisuje **globální chování systému velkého počtu částic.** !

Základní cíl statistiky:

$$\boxed{\text{Nalézt } \textbf{nejpravděpodobnější způsob}\text{, kterým určitá energie } \mathbf{E} \text{ může být } \textbf{rozdělena} \text{ mezi } \mathbf{N} \text{ částic ve stavu termodynamické rovnováhy při teplotě } \mathbf{T}.} \quad (1)$$

Můžeme tak určit, jak velký počet částic n_1 bude nejpravděpodobněji mít energii ε_1, jak velký počet n_2 bude mít energii ε_2, ... atd.

Přitom musí samozřejmě platit:

$$\sum_i n_i = N \qquad \text{celkový počet částic}$$

$$\sum_i \varepsilon_i n_i = E \qquad \text{jejich celková energie}$$

$$(2)$$

- Označme symbolem g_i počet <u>různých kvantových stavů</u> s energií ε_i:

$$\underbrace{\text{— — — —}}_{g_i = 4} \leftarrow \varepsilon_i \qquad (3)$$

Od této chvíle se tedy budeme soustředit na systémy **kvantových mikročástic**, a s tím související **kvantovou statistiku**.

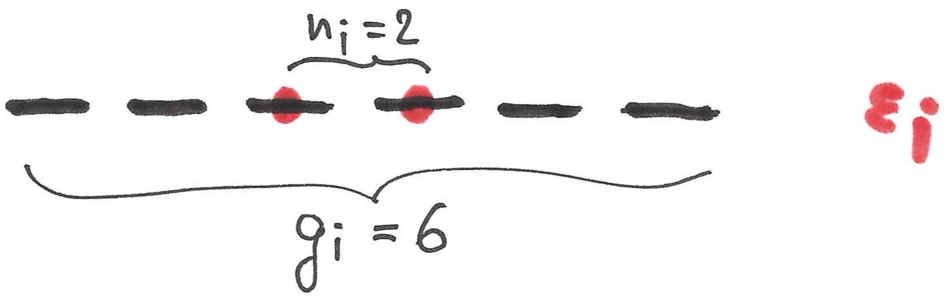
Zaveďme nyní veličinu zvanou **rozdělovací funkce**, která realizuje rozdělení systému **N** mikročástic do jednotlivých kvantových stavů:

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{g_i}} \qquad (4)\ !$$

rozdělovací funkce

Příklad f_i pro **nerozlišitelné fermiony**:

Díky Pauliho principu v jednom stavu může být maximálně 1 fermion:

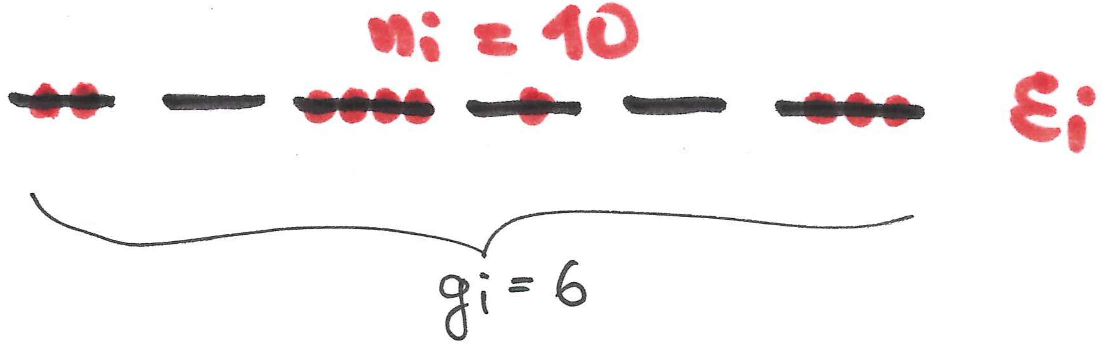


$$f_i = \frac{n_i}{g_i} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Vždy platí: $f_i \leqq 1$ (5)

Příklad f_i pro **nerozlišitelné bosony**:

Díky principu bosonové kondenzace může být v jednom stavu libovolný počet bosonů:



(6)

$$f_i = \frac{n_i}{g_i} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Zde není žádné omezení shora na hodnotu f_i, může tedy být i $f_i \to \infty$.

Z uvedených příkladů je vidět, že **rozdělovací funkce f_i** udává střední počet mikročástic v jednom kvantovém stavu na energetické hladině ε_i.

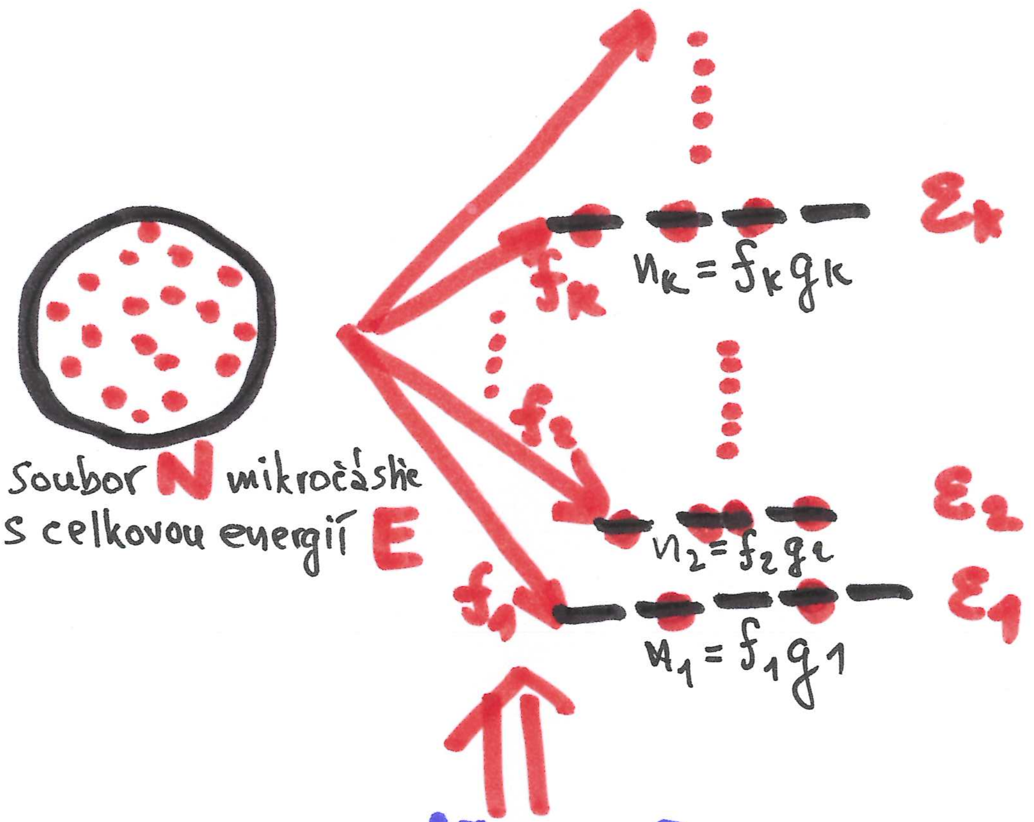
K tomu, aby mohla být nalezena rozdělovací funkce f_i, vychází kvantová statistika z následující myšlenky:

Pravděpodobnost určitého rozdělení mikročástic podle energií **je tím větší**, čím větší je **počet různých způsobů**, kterými lze toto rozdělení uskutečnit.
Označíme-li tento počet symbolem **W**, platí tedy:

nejpravděpodobnější rozdělení je to, pro něž platí

$$W = \text{maximum}$$

Situaci můžeme názorně zobrazit takto:



rozdělovací funkce

! (8) !

W = maximum

při vedlejších podmínkách

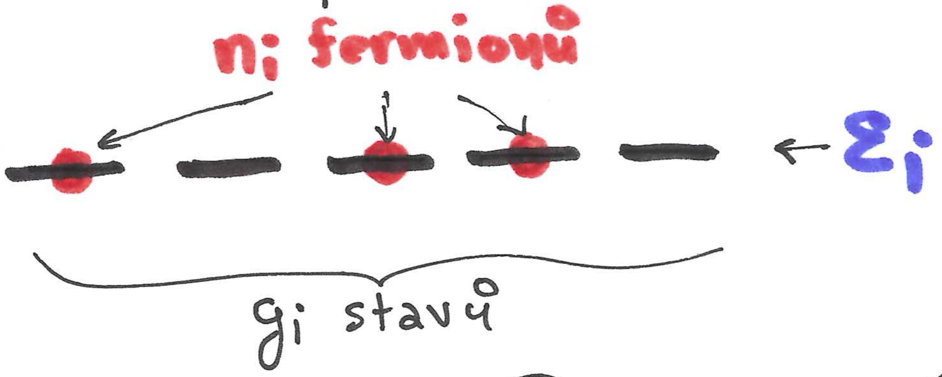
$$\sum_i n_i = \sum_i f_i g_i = N$$

$$\sum_i \varepsilon_i n_i = \sum_i \varepsilon_i f_i g_i = E$$

Nyní prozkoumejme veličinu **W**, tj. <u>počet různých způsobů</u>, kterými lze rozdělení mikročástic do jednotlivých stavů uskutečnit:

- **Mikročástice jsou nerozlišitelné fermiony**

  – v jednom stavu může být <u>maximálně jeden</u> fermion (Pauliho princip)



g_i stavů lze permutovat $g_i!$ způsoby, ale $n_i!$ permutací obsazených stavů a $(g_i-n_i)!$ permutací volných stavů vede díky nerozlišitelnosti ke <u>stejnému</u> výslednému rozdělení mikročástic.

Existuje tedy jen $\dfrac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$ různých způsobů rozdělení na energetické hladině ε_i.

Pro počet různých způsobů rozdělení na všechny hladiny tak máme:

$$W = \frac{g_1!}{n_1!(g_1-n_1)!} \cdot \frac{g_2!}{n_2!(g_2-n_2)!} \cdot \ldots\ldots = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!} \qquad (9)$$

současně musí platit

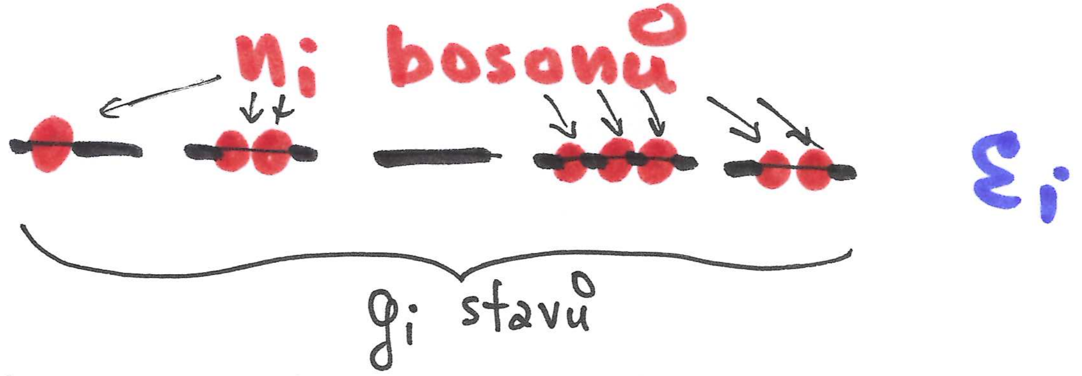
$$\sum_i n_i = N\,;\quad \sum_i \varepsilon_i n_i = E$$

!

FERMI-DIRACOVA STATISTIKA

• Mikročástice jsou nerozlišitelné
bosony

– v jednom stavu může být <u>libovolný počet</u> bosonů (princip kondenzace)



Mezi g_i stavy existuje $(g_i - 1)$ mezer, které tyto stavy od sebe oddělují.
Protože <u>nezáleží na tom, kolik bosonů bude v kterém stavu</u>, můžeme bosony a mezery libovolně permutovat mezi sebou, tj. vytvořit $(n_i + g_i - 1)!$ permutací.

Z tohoto počtu však $n_i!$ permutací mezi samotnými bosony a $(g_i-1)!$ permutací mezi samotnými mezerami neovlivní celkové rozdělení.

To tedy znamená, že existuje jen

$$\frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$$ různých rozdělení.

$$\Downarrow$$

$$W = \prod_i \frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$$

a současně

$$\sum_i n_i = N \; ; \; \sum_i \varepsilon_i n_i = E$$

! (10)

BOSE-EINSTEINOVA STATISTIKA

Z výrazů (9) a (10) pro Fermi-Diracovu (FD) a Bose-Einsteinovu (BE) statistiku vidíme, že W závisí na n_i a g_i.
Protože však $n_i = f_i g_i$, lze konstatovat, že

W je funkcí
- rozdělovací funkce f_i
- počtu kvantových stavů g_i

pro všechny hladiny ε_i. (11)

Podle požadavků (7) a (8) se pak hledá **maximum W** při vedlejších podmínkách

$$\sum_i f_i g_i = N \quad ; \quad \sum_i \varepsilon_i f_i g_i = E \tag{12}$$

Matematika umí takovou proceduru provést, využije také faktu, že

$$\boxed{\underbrace{\frac{E}{N}}_{\text{střední hodnota energie 1 mikročástice}} = \frac{3}{2}kT} \quad (13)$$

k … Boltzmannova konstanta $k = 1.38 \times 10^{-23}\,[JK^{-1}]$

T … termodynamická teplota souboru částic

,

z výsledkem složitého výpočtu jsou

nejpravděpodobnější rozdělovací funkce

f_i^{FD} … pro nerozlišitelné fermiony

f_i^{BE} … pro nerozlišitelné bosony (14)

$$f_i^{FD} = \frac{1}{\left(e^{\frac{\varepsilon_i - E_F}{kT}} + 1\right)}$$

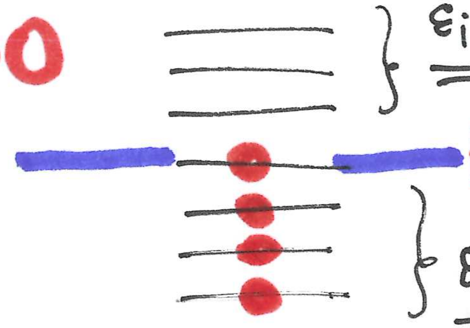
$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3}$$

$\frac{N}{V}$ ... objemová koncentrace fermionů

! **(15)**

Energie E_F se nazývá **energie Fermiho hladiny** a při termodynamické teplotě **$T \to 0$** rozděluje kvantové stavy na **obsazené** a **prázdné**:

$T \to 0$



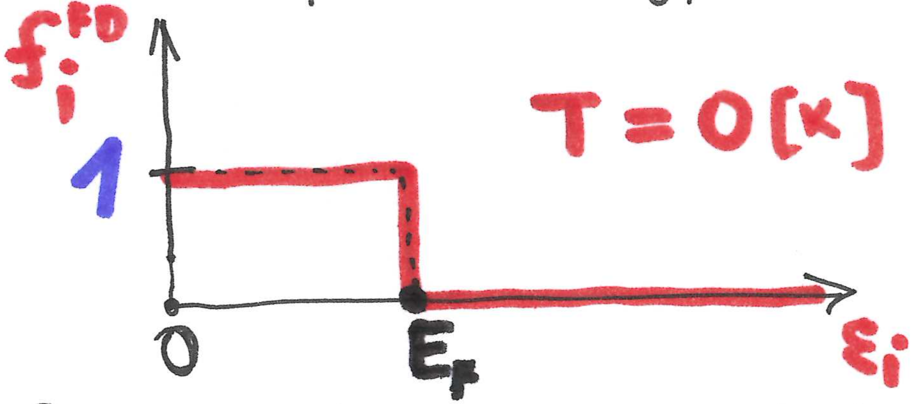
$\underline{\underline{\varepsilon_i > E_F}} \Rightarrow f_i^{FD} = \frac{1}{e^{\infty}+1} = \underline{\underline{0}}$

Fermiho hladina E_F

$\underline{\underline{\varepsilon_i < E_F}} \Rightarrow f_i^{FD} = \frac{1}{e^{-\infty}+1} = \underline{\underline{1}}$

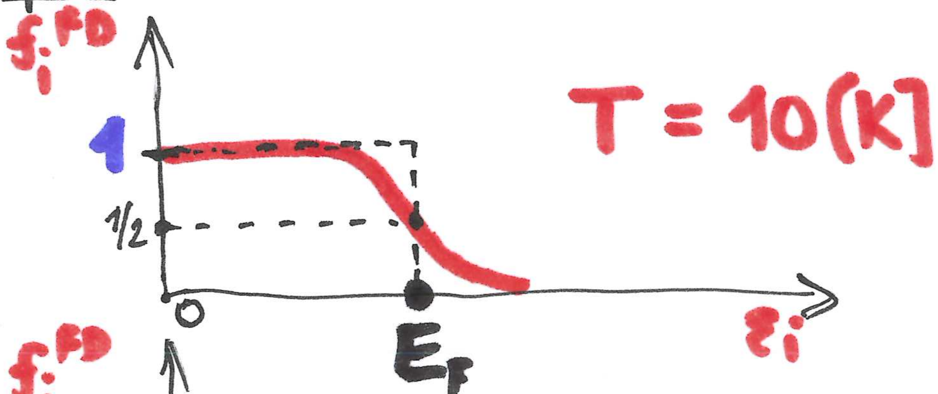
! **(16)**

Graficky můžeme vyjádřit takto:

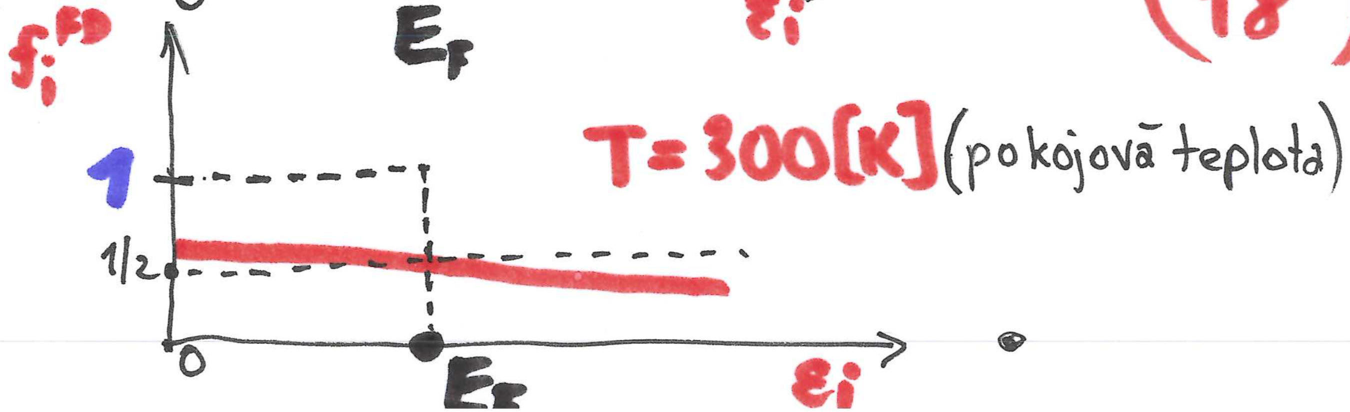


. (17)

Při vyšších teplotách se Fermiho hladina postupně stává méně ostrou, tj. fermiony obsazují kvantové stavy i nad Fermiho hladinou a uvolňují stavy pod Fermiho hladinou:



(18)



.

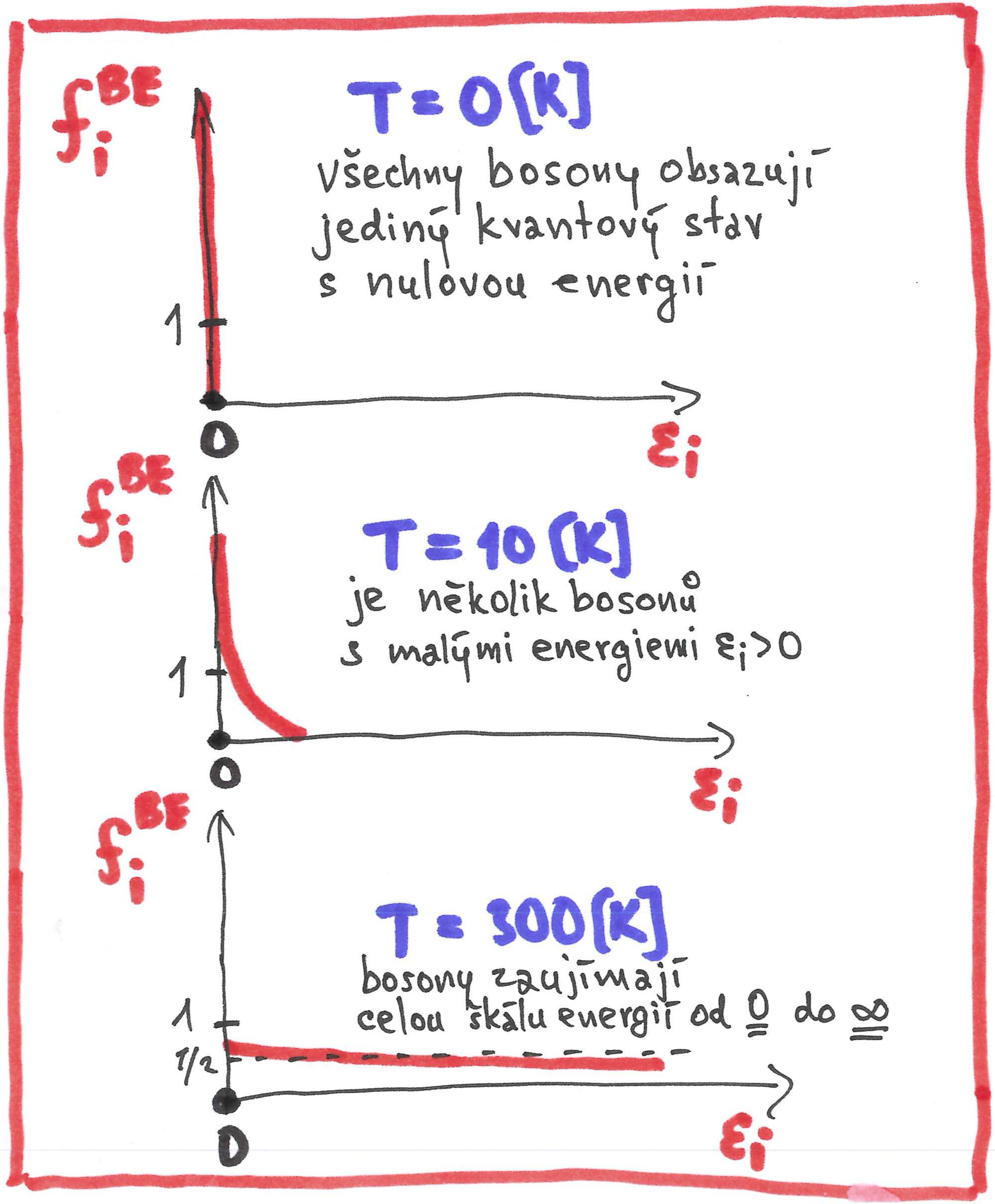
Nyní obraťme pozornost na Bose–Einsteinovu rozdělovací funkci f_i^{BE} pro soubor nerozlišitelných bosonů:

$$\boxed{f_i^{BE} = \frac{1}{\left(e^{\frac{\varepsilon_i}{kT}} - 1\right)}} \quad ! \quad (19)$$

Ve srovnání s Fermi-Diracovou rozdělovací funkcí (15), tj. $f_i^{FD} = \dfrac{1}{\left(e^{\frac{\varepsilon_i - E_F}{kT}} + 1\right)}$,

- chybí bosonový analog energie Fermiho hladiny, neboli $E_B = 0$;
- Znaménko $\oplus$ v f_i^{FD} je změněno na $\ominus$ v f_i^{BE}.

Grafické vyjádření f_i^{BE} je při nízkých teplotách **velmi odlišné** od f_i^{FD}, avšak s rostoucí teplotou rozdíl mezi nimi postupně mizí:

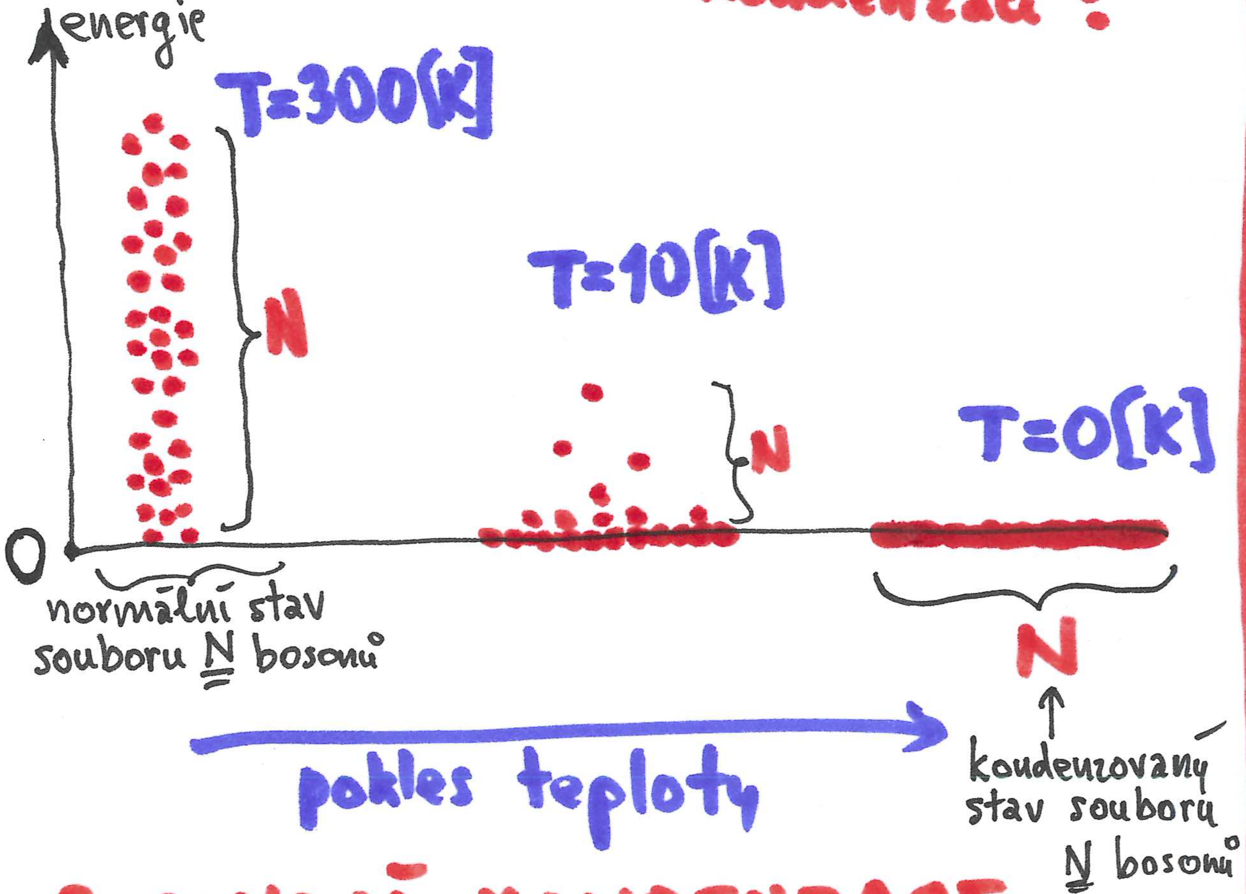


f_i^{BE}
$T = 0\,[K]$
Všechny bosony obsazují jediný kvantový stav s nulovou energií
1
0
ε_i
f_i^{BE}
$T = 10\,[K]$
je několik bosonů s malými energiemi $\varepsilon_i > 0$
1
0
ε_i
f_i^{BE}
$T = 300\,[K]$
bosony zaujímají celou škálu energií od $\underline{\underline{0}}$ do $\underline{\underline{\infty}}$
1
1/2
0
ε_i

!

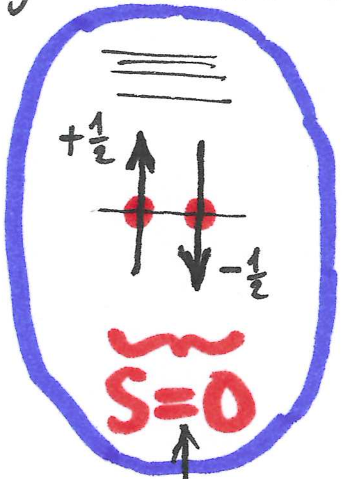
(20)

Chování souboru **N** nerozlišitelných bosonů při různých teplotách na základě výsledku (20) připomíná kondenzaci vodních par na chladném skle; proto zde hovoříme o **bosonové kondenzaci**:



BOSONOVÁ KONDENZACE (21)

Bosonovou kondenzaci můžeme reálně vidět na souboru **atomů He**, neboť víme, že tento atom má na základní energetické hladině antiparalelně orientované poločíselné spiny 2 fermionů, což vytváří celkový spin atomu **S=0**, a atom jako celek se chová jako boson:

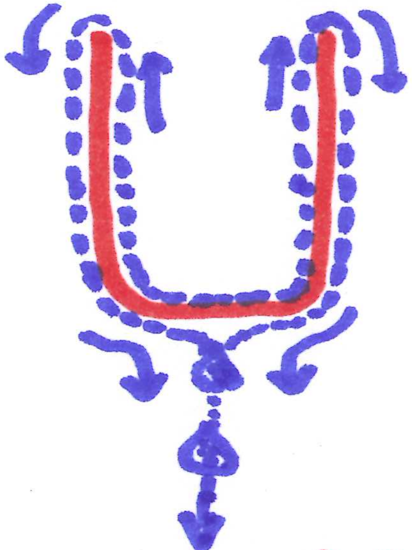


celočíselný spin

atom He = boson (22)

Při snižování teploty až k hodnotě blízké **T=0[K]** všechny atomy He **kondenzují do stavu s nulovou energií.** Přestávají proto interagovat mezi sebou navzájem, zato se však stávají velmi citlivými na jakýkoli popud zvenčí.

Tomuto jevu se říká **supratekutost** :

T=300[K]	T=0[K]
	 ! (23)
standardní stav atomů He	**supratekutý stav atomů He**
(atomy He silně interagují navzájem, ale slabě s okolím, např. s materiálem nádoby)	(atomy He slabě interagují navzájem, ale silně s okolím, např. s materiálem nádoby)

* * * *