

## Relativistická dynamika

Díky Lorentzovým transformacím mají základní rovnice elektromagnetické teorie – Maxwellovy rovnice neměnný tvar ve všech inerciálních soustavách. To samozřejmě neplatí pro základní rovnice mechaniky – Newtonovy pohybové rovnice, které jsou invariantní pouze při transformacích Galileových.

Je proto nezbytné nalézt i pro základní zákony mechaniky vhodný tvar, invariantní při transformacích speciální teorie relativity.

Klasické pohybové rovnice ovšem umožňují spolehlivé výpočty v „pomalých“ inerciálních soustavách a víme již také, že Galileovy transformace jsou limitním případem Lorentzových transformací pro malé rychlosti (ve srovnání s rychlostí světla).

Proto by bylo ideální, kdyby se nový tvar mechanických pohybových rovnic příliš nelišil od klasického Newtonova tvaru a při limitě nízkých rychlostí se pak s ním přímo ztotožnil.

K novým pohybovým rovnicím lze dospět - jako vždy při odvozování fyzikálních vztahů - různě komplikovanými způsoby, které se liší zejména stupněm obecnosti podmínek a matematických postupů. V následujících řádcích provedeme odvození dosti jednoduchým způsobem, s využitím již získaných znalostí (o transformacích rychlostí) a také s využitím té skutečnosti, že v mechanice kromě Newtonových zákonů existují i jiné (z nich odvozené) rovnice, které vyjadřují tak zásadní fyzikální vztahy ve světě, že lze očekávat jejich platnost i v teorii relativity. Jde například o tzv. **zákony zachování** (hybnosti, momentu hybnosti a energie)

Prozkoumejme proto nyní podmínky platnosti prvně jmenovaného **zákona zachování celkové hybnosti** v **uzavřené soustavě** hmotných bodů. Sledujme konkrétně **dokonale pružnou srážku** dvou **stejných koulí**, ideálně **hladkých**.

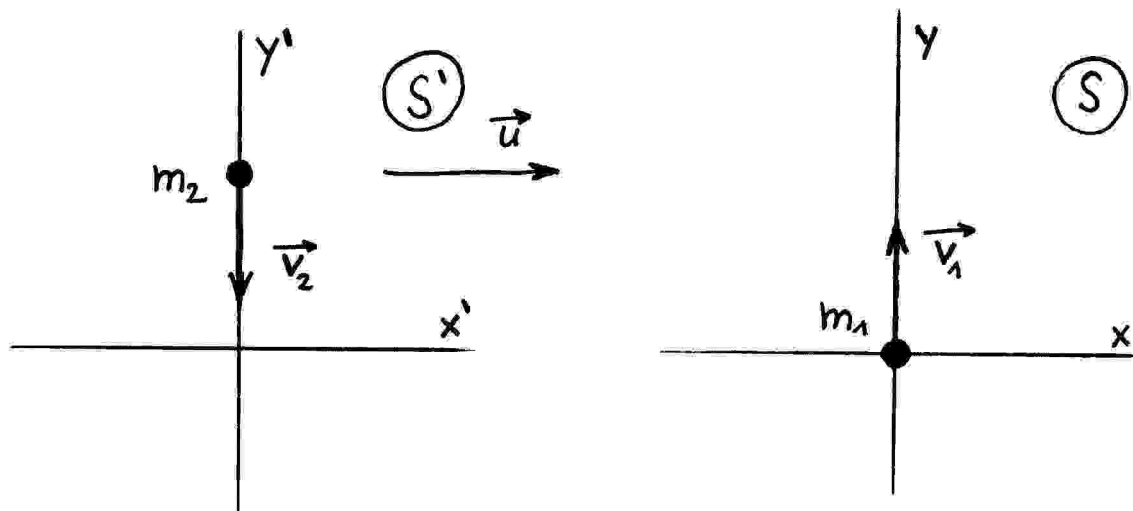
Tyto předpoklady znamenají, že na koule **nepůsobí žádné vnější síly**, a že vnitřní síly soustavy – tj. síly vzájemného působení (při srážce) - jsou konzervativní, že tedy platí **zákon zachování celkové mechanické energie** (a nedochází k její přeměně na teplo). Dokonale hladký kulový povrch pak zaručuje, že při srážce **neexistují tečné síly** (které by způsobily rotaci), pouze síly směřující do středu koulí.

Stejně koule pak samozřejmě mají **stejnou hmotnost** (změřenou v souřadné soustavě, kde jsou koule v klidu – to je tzv. **klidová hmotnost** tělesa).

Pro srážku koulí stanovíme dále tyto podmínky :

- Koule číslo 1 o hmotnosti  $m_1$  necht' je nejprve v klidu v soustavě  $S$  v počátku této soustavy a koule číslo 2 o hmotnosti  $m_2 (=m_1)$  je v klidu na nějakém místě kladné části osy  $y'$  v soustavě  $S'$ , která se pohybuje unášivou rychlostí  $u$  ve směru společných  $x$ -ových os (všechny tyto osy leží ve vodorovné rovině).

- Pozorovatel v soustavě  $S$  nechť potom vypustí kouli číslo 1 z počátku této soustavy v kladném směru osy  $y$  rychlostí  $v_1$  a kouli číslo 2 vypustí pozorovatel v soustavě  $S'$  (ve vhodném čase, aby došlo k vzájemné srážce) z místa na kladné části osy  $y'$  v záporném směru této osy rychlostí  $v_2'$ , která je stejně velká (absolutně, jinak má opačný směr) jako rychlost první koule  $v_1$  (viz obr.).



Vektory počátečních rychlostí těchto koulí před srážkou jsou tedy definovány :

$$\vec{v}_{1př} = (0, v_1)$$

$$\vec{v}'_{2př} = (0, -v_2') = (0, -v_1)$$

Předpokládejme nyní, že pro hybnost hmotného bodu (tělesa bez rotace) bude ve speciální teorii relativity platit formálně stejný vztah jako v klasické fyzice :

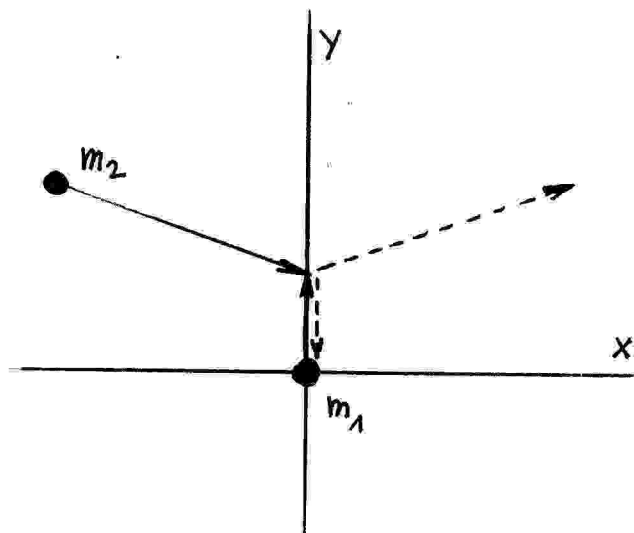
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

A napišme zákon zachování hybnosti v soustavě  $S$ , i v soustavě  $S'$ , ve formě rovnosti celkové hybnosti obou koulí před srážkou a po srážce :

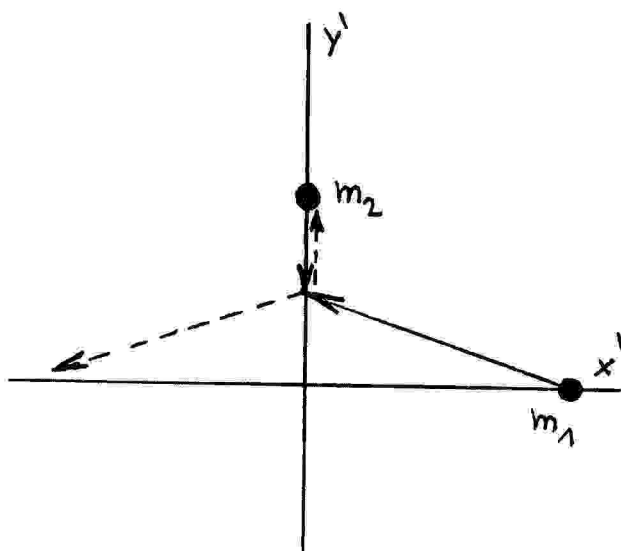
$$m_1 \cdot \vec{v}_{1př} + m_2 \cdot \vec{v}_{2př} = m_1 \cdot \vec{v}_{1po} + m_2 \cdot \vec{v}_{2po}$$

$$m_1 \cdot \vec{v}'_{1př} + m_2 \cdot \vec{v}'_{2př} = m_1 \cdot \vec{v}'_{1po} + m_2 \cdot \vec{v}'_{2po}$$

S pomocí obrázku si pak můžeme promyslet, jak v obou soustavách vypadají jednotlivé vektory rychlostí. Uvažme přitom, že při pružné srážce bez rotace se nezmění kinetická energie posuvného pohybu koule a nezmění se tedy velikost její rychlosti. V důsledku centrálních sil při srážce (hladký povrch) se pak první koule pohybuje po srážce stejnou rychlostí na ose  $y$ , ale opačným směrem, stejně tak se změní  $y$ -ová souřadnice rychlosti druhé koule, ale její  $x$ -ová souřadnice zůstane stejná (podobně v soustavě  $S'$ )



dráhy těles  
při srážce  
v soustavě S



dráhy těles  
při srážce  
v soustavě S'

Dostáváme tedy :

$$\vec{v}_{1př} = (0, v_1)$$

$$\vec{v}'_{1př} = (-u, v'_1)$$

$$\vec{v}_{2př} = (u, -v_2)$$

$$\vec{v}'_{2př} = (0, -v'_2 = -v_1)$$

$$\vec{v}_{1po} = (0, -v_1)$$

$$\vec{v}'_{1po} = (-u, -v'_1)$$

$$\vec{v}_{2po} = (u, v_2)$$

$$\vec{v}'_{2po} = (0, v'_2 = v_1)$$

Kompletní důkaz by vyžadoval použití zákona zachování hybnosti v obou soustavách. Pro získání výsledku však postačí výpočet v jedné soustavě (použití druhé soustavy vede ke stejnému vztahu, dokazuje pouze jeho obecnou platnost ve všech inerciálních soustavách).

Dosadíme proto výše uvedené souřadnice rychlostí do vektorové rovnice zákona zachování hybnosti v soustavě  $S$ , tj. dosadíme nejprve  $x$ -ové a potom  $y$ -ové souřadnice. Dostaneme tak dvě rovnice skalární :

$$m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot u = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot u$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot (-v_2) = m_1 \cdot (-v_1) + m_2 \cdot v_2$$

První rovnice dává triviální vztah, ale rovnice druhá poskytuje užitečný výsledek :

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

Použijme nyní v minulé kapitole odvozených **transformačních vztahů pro rychlosti** v inerciálních soustavách. Napišme konkrétně vztah pro rychlost  $v_2$ , která je  $y$ -ovou souřadnicí rychlosti druhé koule v soustavě  $S$  (tuto rychlost máme zadanou pouze v soustavě  $S'$  jako  $v_2' = v_1$ , přitom  $x$ -ová souřadnice je zde vždy nulová, viz výše vektory rychlostí) :

$$v_2 = v_{2y} = v_{2y}' \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+v_{2x}' \cdot \frac{u}{c^2}} = v_1 \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+0 \cdot \frac{u}{c^2}} = v_1 \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1}$$

Po dosazení výsledku do rovnice v rámečku dostaneme :

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_1 \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1}$$

Po vykrácení můžeme konstatovat, že mezi hmotnostmi dvou stejných těles v jedné soustavě ( $S$ ), které se od sebe odlišují pouze svými rychlostmi, je tedy vztah :

$$m_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Lze také říci, že jde o hmotnosti jednoho a téhož tělesa v různých pohybových stavech, které jsou určeny dvěma rychlostmi : vlastní rychlostí koule a unášivou rychlostí soustavy. Pro jednoznačné stanovení pohybového stavu je nutné vliv jedné rychlosti vyloučit.

Nechť tedy počáteční rychlost vypuštění koulí  $v_1$  konverguje k nule, tj. srážka je nekonečně pomalá :

$$v_1 \rightarrow 0$$

Potom již dostaneme jednoznačně :

$m_1$  ..... je hmotnost koule, která je v klidu v  $S$  .... tzv. **klidová hmotnost tělesa**  $m_0$

$m_2$  ..... je hmotnost koule, která v  $S$  má rychlost  $u$  .... tzv. **okamžitá hmotnost tělesa**  $m$

A můžeme napsat :

$$m = m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Rychlost  $u$  zde již nevystupuje jako unášivá rychlost ve vztahu dvou soustav, nyní to je rychlost tělesa (hmotného bodu) v inerciální soustavě, proto provedeme ještě změnu na standardní označení této rychlosti ( $v$ ) :

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

okamžitá hmotnost tělesa

Hmotnost tělesa v dané inerciální soustavě je rostoucí funkcí velikosti okamžité rychlosti , kterou se těleso v této soustavě pohybuje.

Ve speciální teorii relativity již tedy není hmotnost neměnnou veličinou, ale je závislá na pohybovém stavu tělesa, na rozdíl od klidové hmotnosti , která musí být stejná v každé inerciální soustavě (je to invariantní veličina).

Ze vztahu pro hmotnost vidíme jasně fyzikální důvod konečné (mezní) rychlosti těles ve speciální teorii relativity : kdyby se rychlost tělesa  $v$  měla přiblížit rychlosti světla  $c$ , pak by se hmotnost tělesa zvyšovala nade všechny meze :

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \xrightarrow{v \rightarrow c} \infty$$

A rovněž by do nekonečna rostla práce potřebná pro takové urychlení tělesa (jeho kinetická energie – viz další kapitola) – což jistě také není možné.

Závěrem si všimněme, že je opět otvřena použitelnost klasické fyziky pro malé rychlosti : v této limitě přechází proměnná relativistická hmotnost na konstantní hmotnost klidovou :

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \xrightarrow{v \rightarrow 0} m_0$$

Nezapomeňme, že jsme zkoumali platnost zákona zachování hybnosti v teorii relativity a nalezený vztah pro hmotnost je vlastně podmínkou pro to, aby hybnost tělesa (hmotného bodu) mohla být definována jako v klasické fyzice součinem jeho hmotnosti a hybnosti :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m(v) \cdot \vec{v} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

relativistická hybnost

V dané inerciální soustavě  $S$  pak ve shodě s klasickou mechanikou pokládáme časovou změnu hybnosti tělesa za projev síly , která v této soustavě na těleso působí :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

pohybová rovnice ve speciální teorii relativity

V tomto tvaru již **pohybová rovnice je invariantní** vůči Lorentzově transformaci, tj. přejdeme-li k jiné inerciální soustavě (čárkované), bude opět platit :

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}'$$

**Základní rovnice mechaniky má tedy nyní ve všech inerciálních soustavách stejný tvar** , splňuje již také první Einsteinův postulát.

Je velmi výhodné, že se formálně shoduje s klasickou Newtonovou pohybovou rovnicí, pouze konstantní hmotnost tělesa je nahrazena proměnnou relativistickou hmotností, závislou na rychlosti tělesa .

To je také důvod, proč v teorii relativity **nemůže platit** známý „inženýrský“ vztah :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

neboť již není možné vytknout v derivaci konstantu :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{a} \neq m \cdot \vec{a}$$

Ovšem s tím, jak se v limitě malých rychlostí okamžitá hmotnost stává konstantní, se první člen na pravé straně blíží nule a je tak zcela jasné, že klasické Newtonovy rovnice jsou opět limitním případem relativistických vztahů pro rychlosti, daleko menší než rychlost světla.

Nemáme tedy opravdu žádné důvody měnit kvůli teorii relativity výpočtové postupy klasické mechaniky při běžných technických aplikacích ve strojírenství, stavebnictví, dopravě, atd.