

Jednoduché vratné děje ideálního plynu

1) Děj izotermický ($T = \text{konst.}$)

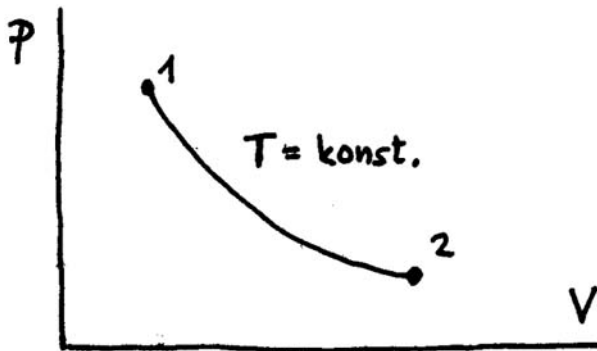
Za předpokladu konstantní teploty se stavová rovnice pro zadané množství plynu změní na známý zákon Boyleův-Mariottův, která říká, že součin tlaku a objemu plynu je konstantní :

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T = \text{konst.}$$

Nebo pro dva stavy plynu, počáteční a koncový :

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

V p-V diagramu je tento proces znázorněn hyperbolou spojující body obou stavů plynu, je to tzv. izoterma :



Další informace o ději získáme rozborem **1.věty termodynamické** a veličin v ní vystupujících.

Při izotermickém ději se mění objem (např. při izotermické expanzi se zvětšuje), plyn tedy koná práci. Podle úvah v minulé kapitole by přitom měla klesat kinetická energie molekul (přeměňuje se na práci), měla by klesat i vnitřní energie plynu.

Z podmínky o konstantní teplotě ovšem plyne, že při tomto ději se vnitřní energie plynu nemění :

$$U = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T = \text{konst}$$

Diferenciál konstantní veličiny je samozřejmě nulový :

$$dU = 0$$

a podle 1.věty termodynamiky musí platit :

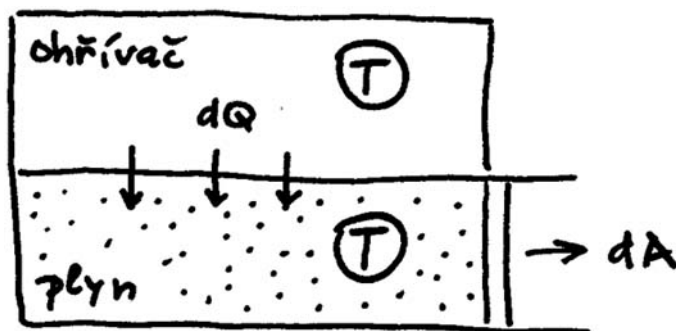
$$dA = dQ - dU = dQ$$

To znamená, že možný úbytek vnitřní energie při práci plynu je ihned (a během procesu průběžně) doplňován dodávanou energií tepelnou. Lze říci, že tak vlastně probíhá „dokonalá přeměna“ tepelné energie na práci. Důležitou otázkou je ovšem realizace takového procesu, při kterém je do plynu dodáváno teplo, aniž dochází ke zvýšení jeho teploty.

V dnešní době si lze představit automatizovaný, počítačem řízený systém – jakýsi **termostat**, který by pomocí teplotních senzorů uvnitř plynu hlídal jeho teplotu tak, že kdyby v důsledku expanze a práce plynu začala teplota klesat (tj. objevila by se nepatrná – diferenciální odchylka od požadované hodnoty), zapnulo by se ihned nějaké ohřívací těleso a do plynu by byla dodávána tepelná energie, dokud by se teplota nezvýšila ...

Jak si však poradili vědci minulosti bez těchto moderních pomůcek?

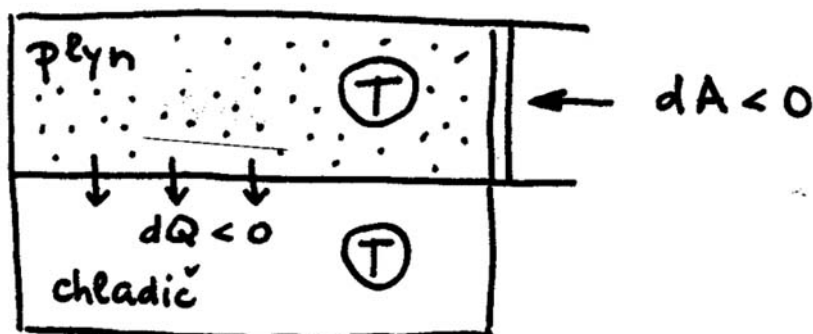
Principiálně stejný účinek jako elektronická regulace bude mít dokonalý tepelný styk (bez ztrát, s nekonečně velikou tepelnou vodivostí) sledovaného plynu se zdrojem tepelné energie o konstantní teplotě rovné požadované teplotě T (tzv. ohříváč, tepelný rezervoár).



Účinek ohříváče lze dobře pochopit v souvislosti s dříve uvedeným popisem vratného děje jako sledu (skoro)rovnovážných stavů : při změně takového stavu dojde k (nekonečně) malé změně stavových veličin – zde k diferenciálnímu poklesu teploty plynu z původní teploty T , a proto z ohříváče bude přecházet teplo do nepatrně chladnějšího plynu, až se opět teploty vyrovnají a nastane další (skoro)rovnovážný stav se stejnou teplotou a poněkud – podle stavové rovnice – odlišným tlakem a objemem. Děj samozřejmě pokračuje dále : protože plyn stále pracuje, teplota opět nepatrně klesá, tepelná energie přechází do plynu a teplota se opět vyrovnává atd.

V takovém uspořádání se tak při práci plynu „automaticky“ doplňuje teplo z tepelného rezervoáru, aby nahradilo vykonanou práci, a proto teplota a vnitřní energie plynu zůstávají konstantní.

V případě izotermické komprese, kdy se objem plynu zmenšuje, protože je pístem v pracovním válci stlačován, je princip „stabilizace“ teploty stejný, pouze teplo a práce mají opačná znaménka, a tedy opačný směr přechodu : práce plynu je záporná – konají ji vnější síly – a tím by měla růst kinetická energie plynu, a tedy i vnitřní energie. Aby se tak nestalo, musí nyní tepelná energie z plynu odcházet do okolí – plyn tedy musí mít opět dokonalý tepelný styk s tepelným jmačem teploty T , který bude odebírat teplo (tzv. chladič).



K tepelnému toku do chladiče dochází nyní při diferenciálním zvýšení teploty plynu jako důsledku práce sil okolí a výsledkem je opět stabilizace teploty a vnitřní energie plynu.

Poznámka: Teoreticky jsou chladič i ohřivač v principu stejné „velké tepelné rezervoáry“, tj. relativně velká tělesa s velkým obsahem vnitřní energie, aby příjem či výdej tepla nezpůsobil změnu jejich teploty. Technické provedení chladiče i ohřivače bude ovšem odlišné.

Vypočítejme nyní konkrétně pomocí 1.věty práci vykonanou plynem a přijaté teplo při izotermickém ději z počátečního stavu 1 (p_1, V_1, T) do konečného stavu 2 (p_2, V_2, T):

$$A = \int_1^2 dA = Q = \int_1^2 dQ$$

Protože nedochází ke změně teploty, nelze použít běžné vztahy pro teplo dodané látce při ohřevu, ale můžeme použít vztah pro práci :

$$A = Q = \int_1^2 dA = \int_1^2 p \cdot dV$$

Dosadíme za tlak ze stavové rovnice :

$$p = \frac{\nu \cdot R \cdot T}{V}$$

A dostaneme :

$$A = Q = \int_1^2 p \cdot dV = \int_1^2 \frac{\nu \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = \nu \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu \cdot R \cdot T \cdot (\ln V_2 - \ln V_1)$$

můžeme zapsat jednodušeji :

$$A = Q = \nu \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

práce a teplo při izotermickém ději

Při izotermické expanzi bude konečný objem větší, a tedy vykonaná práce i přijaté teplo jsou kladné :

$$V_2 > V_1 \Rightarrow A = Q > 0$$

izotermická expanze

Při izotermické kompresi je tomu naopak :

$$V_2 < V_1 \Rightarrow A = Q < 0$$

izotermická komprese

2) Děj izochorický ($V = \text{konst.}$)

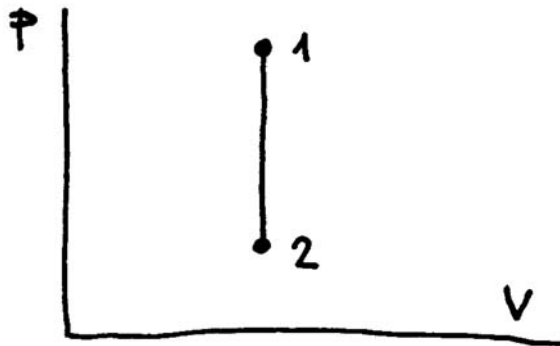
Za předpokladu konstantního objemu se nyní stavová rovnice pro dané množství plynu změnila na Gay-Lussacův zákon o rozpínavosti plynu :

$$\frac{p}{T} = \frac{\nu \cdot R}{V} = \text{konst.}$$

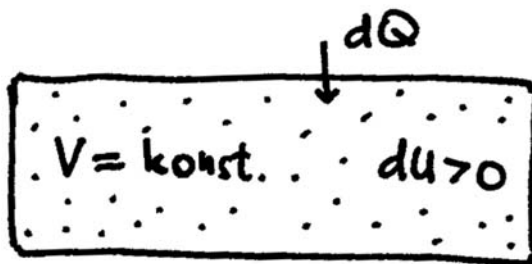
Nebo pro dva stavy plynu, počáteční a koncový :

$$\boxed{\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}}$$

V p-V diagramu je tento děj znázorněn přímkou spojující body obou stavů, rovnoběžnou s osou tlaků – je to tzv. izochora.



Podmínku realizace tohoto děje – konstantní objem plynu – jednoduše zajistí pevný neměnný objem nádoby, ve které je plyn umístěn.



Konstantní objem plynu ovšem znamená jeho nulový přírůstek (diferenciál), a tedy znemožní práci plynu :

$$dA = p \cdot dV = 0$$

Podle 1. věty pak platí :

$$\boxed{dQ = dU + dA = dU}$$

To znamená, že veškerá dodaná tepelná energie se přímo mění na přírůstek vnitřní energie, ohřev plynu je za těchto podmínek nejefektivnější, tj. na zvýšení teploty o jednotkový teplotní rozdíl (1 K) se spotřebuje

nejmenší množství tepla. Jinak řečeno, molární tepelná kapacita má nejmenší možnou hodnotu, a jestliže s její pomocí vyjádříme dodané teplo :

$$dQ = \nu \cdot C_V \cdot dT$$

Dostaneme tím nový, dobře použitelný vztah pro přírůstek (změnu) vnitřní energie, který se rovná tomuto teplu :

$$\boxed{dU = \nu \cdot C_V \cdot dT} \quad \text{změna vnitřní energie}$$

Jestliže pak tento výraz porovnáme se vztahem dříve odvozeným pro ideální plyn :

$$dU = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot dT$$

Dostaneme konkrétní velikost pro molární tepelnou kapacitu při konstantním objemu :

$$\boxed{C_V = \frac{3}{2} \cdot R}$$

Tato hodnota platí pouze za podmínky platnosti dříve uvedeného Maxwellova rozdělení – pro ideální jednoatomový plyn, kdy lze zanedbat příspěvek energie rotačního pohybu molekuly.

Pro běžné dvouatomové molekuly (kyslík, dusík, vodík, ...) pak platí :

$$C_V = \frac{5}{2} \cdot R$$

A složitější molekuly pak mají tepelnou kapacitu ještě vyšší.

Kdybychom chtěli vypočítat dodané teplo a zvýšení vnitřní energie plynu při nějakém izochorickém ději z počátečního stavu 1 (p_1, V, T_1) do konečného stavu 2 (p_2, V, T_2), provedli bychom integraci – tj. „součet“ diferenciálních veličin :

$$Q = \Delta U = \int_1^2 dQ = \int_{T_1}^{T_2} \nu \cdot C_V \cdot dT = \nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

Celkové dodané teplo by se samozřejmě převedlo na celkové zvýšení vnitřní energie, bez vykonání jakékoliv práce.

3) Děj izobarický ($p = konst.$)

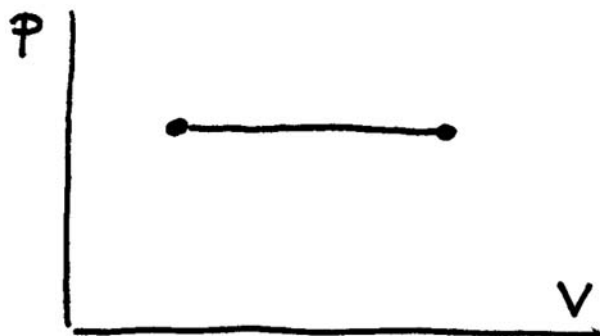
Za předpokladu konstantního tlaku se stavová rovnice pro zadané množství plynu změní na Gay-Lussacův zákon o roztažnosti plynu :

$$\frac{V}{T} = \frac{\nu \cdot R}{p} = konst.$$

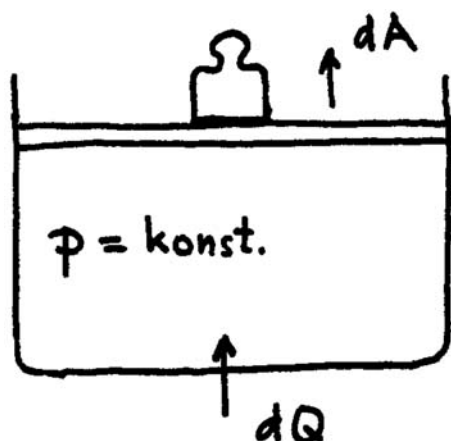
Nebo pro dva stavy plynu, počáteční a koncový :

$$\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$$

V p-V diagramu je tento děj opět znázorněn přímkou spojující body obou stavů, rovnoběžnou s osou V – je to tzv. izobara.



Podmínku realizace tohoto děje – konstantní tlak plynu – je možno zajistit použitím válce s pístem, na který bychom zvenku (vnější síly) působily konstantní silou (svislý píst by mohlo např. zvenku zatěžovat závaží zvolené hmotnosti).



Aplikujeme dále na izobarický děj 1.větu termodynamiky, jejíž žádný člen nyní nebude nulový :

$$\boxed{dQ = dU + dA}$$

Dodávaná tepelná energie se tedy spotřebuje nejen na zvýšení vnitřní energie, ale i na konání práce plynem - ohřev plynu je méně efektivní než za konstantního objemu, tj. na zvýšení teploty o jednotkový teplotní rozdíl se spotřebuje větší množství tepla, tedy molární tepelná kapacita je větší :

$$dQ = \nu \cdot C_p \cdot dT$$

Dosaďme tento výraz do 1.věty spolu se známými vztahy pro práci plynu a zvýšení vnitřní energie :

$$\nu \cdot C_p \cdot dT = \nu \cdot C_V \cdot dT + p \cdot dV$$

K úpravě druhého členu na pravé straně použijeme stavovou rovnici :

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$$

kteřou diferencujeme, tj. vypočítáme diferenciál (přírůstek) pravé i levé strany :

$$p \cdot dV = \nu \cdot R \cdot dT$$

Dostaneme tak :

$$\nu \cdot C_p \cdot dT = \nu \cdot C_V \cdot dT + \nu \cdot R \cdot dT = \nu \cdot (C_V + R) \cdot dT$$

Porovnáním obou stran tak vznikne vztah pro molární tepelnou kapacitu při konstantním tlaku :

$$\boxed{C_p = C_V + R} \quad \text{\underline{Mayerův vztah}}$$

Pro jednoatomový plyn tedy bude platit :

$$C_p = \frac{3}{2} \cdot R + R = \frac{5}{2} \cdot R$$

A pro dvouatomové molekuly :

$$C_p = \frac{5}{2} \cdot R + R = \frac{7}{2} \cdot R$$

Pro výpočet dodaného tepla, vykonané práce a změny vnitřní energie při nějakém izobarickém ději ze stavu 1 (p, V_1, T_1) do stavu 2 (p, V_2, T_2) bychom, jako v předcházejících dějích, provedli integraci elementárních veličin :

$$Q = \int_1^2 dQ = \int_{T_1}^{T_2} \nu \cdot C_p \cdot dT = \nu \cdot C_p (T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \int_1^2 dU = \int_{T_1}^{T_2} \nu \cdot C_V \cdot dT = \nu \cdot C_V (T_2 - T_1)$$

$$A = \int_1^2 dA = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p \cdot (V_2 - V_1)$$

A současně pro práci musí platit (využijeme stavovou rovnici) :

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{T_1}^{T_2} \nu \cdot R \cdot dT = \nu \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

Stejný vztah bychom také dostali podle 1. věty odečtením prvních dvou výrazů pro teplo a změnu vnitřní energie, nebo přímým dosazením ze stavové rovnice do předchozího výrazu pro práci.

Zatím jsme prozkoumali **tři významné termodynamické děje** a jsou to vlastně všechny možnosti, kdy může být jedna ze tří stavových veličin význačná – konstantní. Ve dvou případech jsme pak dostali zvláštní tvary 1. věty, pouze se dvěma členy – při izotermickém ději byl nulový přírůstek vnitřní energie a při izochorickém ději byla nulová vykonaná práce.

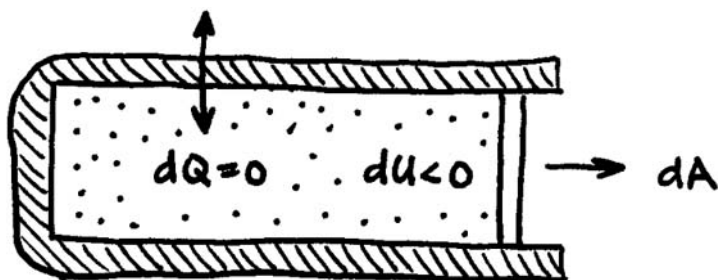
Může nás tedy napadnout, že by mohla existovat možnost - nulového dodaného tepla – a takový termodynamický děj se ukázal být velmi důležitým.

4) Děj adiabatický

Tímto pojmem označujeme termodynamický děj, při kterém není plynu dodávána žádná tepelná energie a samozřejmě žádné teplo ani není odebíráno – obecně říkáme, že je **nulová výměna tepla termodynamické soustavy s okolím**.

$$dQ = 0$$

Toho lze dosáhnout dokonalou tepelnou izolací stěn, které obklopují plyn - jejich tepelná vodivost tedy musí být nulová. (Povšimněte si, že to je právě opačná podmínka, než byla u izotermického děje, kdy jsme požadovali dokonalou tepelnou propustnost stěn.)



1. věta termodynamická má tedy v případě adiabatického děje také jednoduchý tvar :

$$dA = dQ - dU = -dU$$

Plyn nyní koná práci pouze „na úkor“ vnitřní energie, a můžeme proto tuto práci jednoduše vyjádřit pouze pomocí teplotní změny plynu :

$$dA = -dU = -\nu \cdot C_V \cdot dT$$

Celková **práce vykonaná plynem** při nějakém adiabatickém ději z počátečního stavu 1 (p_1, V_1, T_1) do konečného stavu 2 (p_2, V_2, T_2) pak bude integrálem těchto elementárních prací :

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 -dU = -\nu \cdot C_V \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT$$

Výsledek této integrace je samozřejmě jednoduchý :

$$\boxed{A = -\nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)} \quad \textit{práce při adiabatickém ději}$$

Při konání kladné práce plynem, tj. zvětšování objemu, se jeho teplota snižuje, tj. vnitřní energie klesá :

$$\boxed{A > 0 \Rightarrow T_2 < T_1} \quad \textit{adiabatická expanze}$$

A práce sil okolí pak zahřívá plyn, tedy zvyšuje jeho vnitřní energii :

$$\boxed{A < 0 \Rightarrow T_2 > T_1} \quad \textit{adiabatická komprese}$$

Při adiabatickém ději není zřejmě konstantní žádná ze stavových veličin – mění se obecně tlak, teplota i objem plynu – a při jejich výpočtech tedy musíme používat obecný tvar stavové rovnice :

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1}$$

Na dalších řádcích si však ukážeme, jak lze z této rovnice „vyloučit“ libovolnou proměnnou a dostat zjednodušený tvar stavové rovnice vhodný pro dvourozměrné grafy, např. pro p-V diagram.

Napišme znovu 1.větu :

$$dA = -dU = -\nu \cdot C_V \cdot dT$$

A za práci použijme standardní výraz :

$$p \cdot dV = -\nu \cdot C_V \cdot dT$$

Za teplotu na pravé straně dosadíme ze stavové rovnice :

$$T = \frac{p \cdot V}{\nu \cdot R}$$

A vypočítáme její diferenciál (jako funkce dvou proměnných p a V) :

$$p \cdot dV = -\nu \cdot C_V \cdot d\left(\frac{p \cdot V}{\nu \cdot R}\right) = -\nu \cdot C_V \cdot \frac{1}{\nu \cdot R} \cdot (p \cdot dV + V \cdot dp)$$

Po vynásobení R a převedení na levou stranu máme :

$$R \cdot p \cdot dV + C_V \cdot p \cdot dV + C_V \cdot V \cdot dp = 0$$

Použijeme-li Mayerův vztah :

$$C_p = C_V + R$$

pak dostáváme :

$$C_p \cdot p \cdot dV + C_V \cdot V \cdot dp = 0$$

Rovnici vydělíme molární kapacitou při konstantním objemu a součinem p.V :

$$\frac{C_p}{C_V} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Zavedeme ještě novou veličinu :

$$\boxed{\kappa = \frac{C_p}{C_V}} \quad \text{\underline{\underline{Poissonova konstanta}}}$$

A rozdělíme členy na obě strany :

$$\kappa \cdot \frac{dV}{V} = - \frac{dp}{p}$$

Vznikl tak speciální tvar diferenciální rovnice o dvou proměnných, které jsou separovány, tj. odděleny, každá na jedné straně rovnice.

K vyřešení této rovnice stačí provést její integraci pomocí určitého integrálu v mezích od počátečního stavu plynu (p_1, V_1, T_1) do konečného stavu (p_2, V_2, T_2) :

$$\int_{V_1}^{V_2} \kappa \cdot \frac{dV}{V} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

Primitivní funkce na obou stranách jsou stejného druhu :

$$\kappa \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = - [\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

Dostaneme tedy :

$$\kappa \cdot (\ln V_2 - \ln V_1) = - (\ln p_2 - \ln p_1)$$

Po roznásobení a použití znalostí o logaritmech :

$$\ln(V_2)^\kappa - \ln(V_1)^\kappa = - \ln p_2 + \ln p_1$$

a po převedení členů :

$$\ln p_1 + \ln(V_1)^\kappa = \ln p_2 + \ln(V_2)^\kappa$$

a po sdružení logaritmů:

$$\ln [p_1 \cdot (V_1)^\kappa] = \ln [p_2 \cdot (V_2)^\kappa]$$

Rovnost logaritmů znamená ovšem také rovnost funkcí :

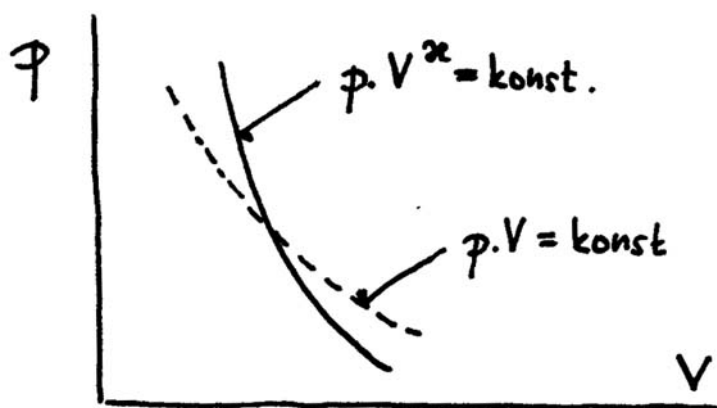
$$p_1 \cdot (V_1)^\kappa = p_2 \cdot (V_2)^\kappa$$

nebo obecněji - neboť počáteční i koncový stav byly libovolné :

$$p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$$

Poissonova rovnice

Dostali jsme tak obecnou rovnici adiabaty. Protože Poissonova konstanta je větší než 1, je křivka adiabaty v p-V diagramu „strmější“ než izoterma.



Dosazením ze stavové rovnice lze získat **další varianty rovnice adiabaty** pro jiné dvě proměnné :

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{konst.}$$

$$p^{1-\kappa} \cdot T^\kappa = \text{konst.}$$

Poznámka: Adiabatickému ději se bude také blížit rychle probíhající děj v tepelně neizolované termodynamické soustavě (plynu), protože teplo „nestačí“ přecházet do plynu. Čím je tedy proces rychlejší, tím více se přibližuje adiabatickému ději (ale tím více se odchyluje od kvazistacionárnosti, tedy také od vratnosti a od platnosti stavové rovnice).