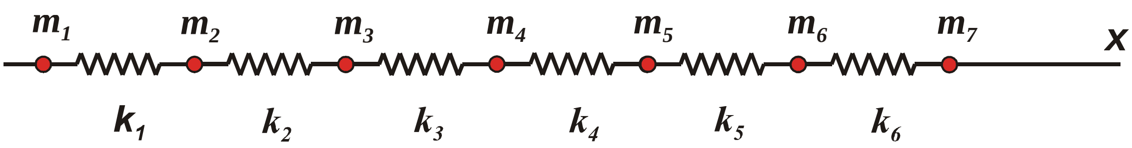
Lineární řetězec oscilátorů

V této kapitole budeme studovat soustavu N vzájemně pružně vázaných lineárních harmonických oscilátorů, které jsou rozloženy v jediné přímce (např. v ose x) – je to tzv. ***bodová řada*** (viz obrázek) .



Problém zjednodušíme předpokladem, že všechny oscilátory jsou stejné – tj. hmotné body o stejné hmotnosti m v pravidelné vzdálenosti a jsou vázány stejnými pružnými silami (stejná konstanta k).

Půjde tak vlastně o nejjednodušší – ***jednorozměrný*** - model ***pružného hmotného prostředí*** , který může posloužit k popisu chování homogenní ***struny, tyče,*** nebo ***vzduchového sloupce***

V minulé kapitole jsme již uvážili, že rozkmitání i jen jediného hmotného bodu jakékoliv - obecně třírozměrné pružné soustavy - se pružnými vazbovými silami postupně přenese na všechny ostatní hmotné body a že vzniklý kmitavý stav celé soustavy označujeme jako vlnění. Kmity libovolného bodu pak budou vektorovou funkcí čtyř proměnných - místa a času :

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(x,y,z,t)$$

V našem případě ***jednorozměrné bodové řady*** to bude ovšem vektorová funkce jen dvou proměnných :

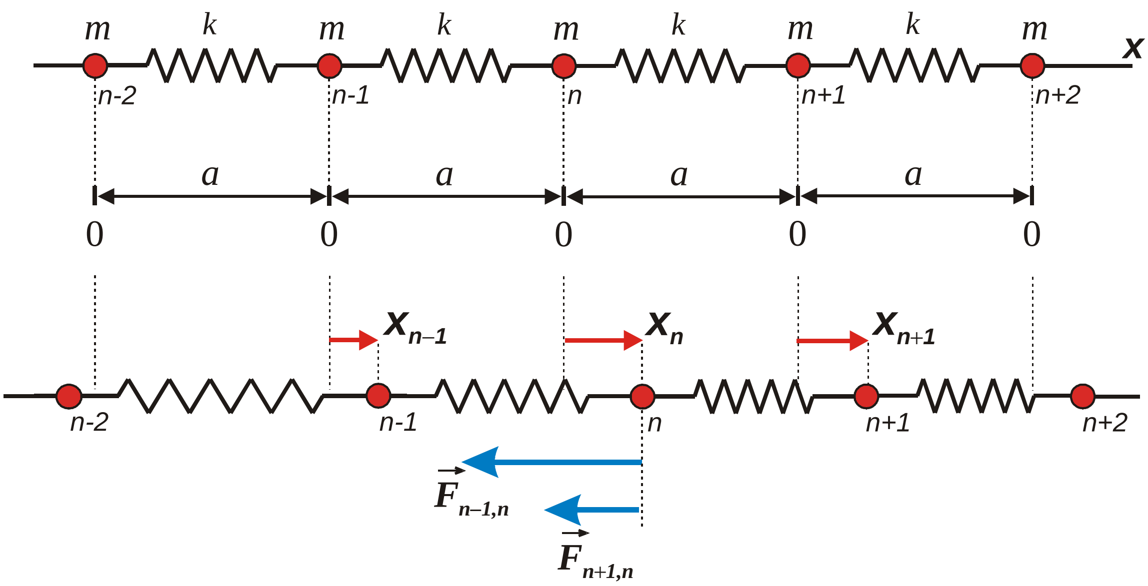
$$\vec{u} = \vec{u}(x,t)$$

A tento vztah lze ještě dále zjednodušit při zkoumání ***lineárně polarizovaných kmitů*** (vlnění), kdy jsou výchylky všech hmotných bodů navzájem rovnoběžné - leží stále v jedné rovině (tzv. ***rovina polarizace***) - a mají tedy v prostoru stále stejný směr .
Jestliže tento směr známe, můžeme pak určovat jen velikost výchylky, tedy pouze skalární funkci :

$$\boxed{u = u(x,t)}$$

Tento směr výchylek hmotných bodů je obecně zcela libovolný …... jednou krajní možností je, že hmotné body kmitají kolmo na osu x (tj. například v ose y) – tak kmitá struna hudebního nástroje , jsou to ***příčné kmity*** ……. druhou krajní možností jsou pak kmity ve směru osy x - takové jsou akustické kmity ve vzduchovém sloupci – ***podélné kmity*** .

Pro naše výpočty zvolíme podélné kmity hmotných bodů, které jsou zřejmě matematicky nejjednodušší - k jejichž popisu postačí jediná proměnná veličina, x–ová souřadnice těchto bodů.



V počátečním klidovém stavu zaujímají všechny hmotné body své ***rovnovážné polohy*** (na obrázku jsou označeny 0) v pravidelných vzdálenostech a . V rozkmitaném stavu pak bude mít každý hmotný bod nějakou výchylku $\boldsymbol{x_n}$ ze své rovnovážné polohy, která se bude měnit s časem a bude jistě také záviset na poloze $\boldsymbol{x}$ hmotného bodu v řetězci :

$$x_n = x_n(x, t) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots N)$$

Pro stanovení polohy $\boldsymbol{x}$ hmotných bodů v řetězci můžeme dobře využít jejich pravidelné rozmístění - je to vždy určitý násobek jejich vzdálenosti a :

$$\boxed{x_n = x_n(n \cdot a, t)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots N)$$

Ke kompletnímu popisu kmitavého stavu lineárního řetězce je proto nutno stanovit těchto N rovnic pro výchylky všech hmotných bodů řetězce - musíme proto sestavit a řešit pohybové rovnice všech bodů řetězce. Protože i pružné síly mají směr osy x , můžeme pro libovolný, obecně n-tý hmotný bod psát pouze ve skalárním tvaru :

$$m \cdot \frac{d^2 x_n}{dt^2} = F_n$$

Uvažme s využitím horního obrázku, že síla F_n působící na *n*-tý hmotný bod je složena ze dvou složek :

1) ze síly kterou na něj působí pravá pružina, tj. vazba s $(n+1)$-ním bodem. Můžeme ji také nazvat silou, kterou působí $(n+1)$-ní bod na náš *n*-tý hmotný bod. Jako pružná síla je pak úměrná deformaci – změně délky pružiny, která vznikne při obecně různých výchylkách těchto hmotných bodů (viz obrázek) :

$$\boxed{F_{n+1,n} = -\,k\cdot(x_n - x_{n+1})} \qquad (\,n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\, N\,)$$

2) ze síly kterou na něj působí pružina levá, tj. vazba s $(n\text{-}1)$-ním bodem. Analogicky ji můžeme nazvat silou, kterou působí $(n\text{-}1)$-ní bod na *n*-tý hmotný bod a musí platit .

$$\boxed{F_{n-1,n} = -\,k\cdot(x_n - x_{n-1})} \qquad (\,n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\, N\,)$$

Dohromady tedy bude :

$$F_n = F_{n+1,n} + F_{n-1,n} = -\,k\cdot(x_n - x_{n+1}) = -\,k\cdot(x_n - x_{n-1})$$

Což dává :

$$F_n = F_{n+1,n} + F_{n-1,n} = -\,k\cdot\big(2\,x_n - (x_{n+1} + x_{n-1})\big)$$

A pohybová rovnice tedy bude :

$$\boxed{m\cdot\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\,k\cdot\big(2\,x_n - (x_{n+1} + x_{n-1})\big)} \qquad (\,n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\, N\,)$$

Z pohybové rovnice vidíme skutečnou „provázanost“ celého řetězce, protože výchylka *n*-tého oscilátoru (na levé straně) závisí na výchylkách obou jeho sousedních oscilátorů.

Dostali jsme ovšem ne jednu rovnici, ale ***soustavu N vzájemně vázaných diferenciálních rovnic*** o $N+2$ neznámých (v první rovnici vznikne člen x_0 a v poslední rovnici pak x_{N+1} , které v principu popisují vazbu prvního a posledního hmotného bodu na okolní prostředí, a pro konkrétní řešení je musíme definovat – vyjadřují vlastně ***okrajové podmínky*** lineárního řetězce).

Jak dále ukážeme, této soustavě rovnic vyhovují (v komplexním oboru) řešení ve tvaru :

$$\boxed{x_n = A\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - q\cdot n\cdot a)}} \qquad (\,n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\, N\,)$$

Vidíme ihned, že výchylka (kmity) kteréhokoliv hmotného bodu skutečně závisí nejen na čase, ale i na vzdálenosti $(n\,a)$ od počátku souřadnic (počátku řetězce).

Je nám také jasné, že tento výraz je matemeticky totožný s ***komplexním tvarem harmonických kmitů*** hmotných bodů o amplitudě A, s úhlovou frekvencí ω a s fázovou konstantou $-q\,n\,a$ (viz minulé kapitoly).

Tím jsme také dokázali, že kmity všech hmotných bodů v řetězci mají stejný časový průběh – je to sinusovka stále stejné frekvence i amplitudy – což jsme intuitivně, bez důkazu předpokládali v minulé kapitole při sestavení rovnice vlnění.

Proměnná fázová konstanta $-q\,n\,a$ ovšem znamená fázové zpoždění kmitů, které je přímo úměrné vzdálenosti $n\,a$ hmotného bodu od počátku – to znamená, že naše řešení x_n je formálně shodné s rovnicí ***postupného vlnění*** v bodové řadě.

Veličina q je pak ekvivalentní úhlovému vlnočtu vlnění, který jsme definovali v minulé kapitole (je pouze jinak označen, aby se odlišil od konstanty pružné síly) :

$$\boxed{q = \frac{\omega}{c} = \frac{2\cdot\pi\cdot f}{c} = \frac{2\cdot\pi}{\lambda}}$$

úhlový vlnočet

Všechny integrační konstanty (parametry vlnění) - A, ω a q - se určují z konkrétních okrajových podmínek. V dalších řádcích prodiskutujeme souvislost mezi ω a q, kterou zjistíme když dosadíme řešení x_n do pohybové rovnice. Nejprve derivujme podle času :

$$\frac{d\,x_n}{dt} = A\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - q\cdot n\cdot a)}\cdot i\,\omega$$

A druhou derivaci :

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = A\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - q\cdot n\cdot a)}\cdot(i\,\omega)^2 = -\,\omega^2\cdot x_n$$

Ještě potřebujeme součet sousedních výchylek :

$$x_{n+1} + x_{n-1} = A\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - q\cdot(n+1)\cdot a)} + A\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - q\cdot(n-1)\cdot a)}$$

Po vytknutí dostaneme :

$$x_{n+1} + x_{n-1} = A\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - q\cdot n\cdot a)}\cdot(\,e^{+i\cdot q\cdot a} + e^{-i\cdot q\cdot a}\,) = x_n\cdot(\,e^{+i\cdot q\cdot a} + e^{-i\cdot q\cdot a}\,)$$

Nyní už můžeme dosadit do naší pohybové rovnice :

$$m \cdot \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -k \cdot \left(2x_n - (x_{n+1} + x_{n-1}) \right)$$

Tedy dostaneme :

$$m \cdot (-\omega^2 \cdot x_n) = -k \cdot \left(2x_n - x_n \cdot (e^{+i \cdot q \cdot a} + e^{-i \cdot q \cdot a}) \right)$$

Po vykrácení výchylkou :

$$-m \cdot \omega^2 = k \cdot (e^{+i \cdot q \cdot a} - 2 + e^{-i \cdot q \cdot a})$$

Závorku na pravé straně lze vtipně přepsat pomocí kvadrátu součtu jako :

$$-m \cdot \omega^2 = k \cdot \left(e^{+\frac{i \cdot q \cdot a}{2}} - e^{-\frac{i \cdot q \cdot a}{2}} \right)^2$$

A dále využijeme Eulerův vztah :

$$e^{i \cdot \alpha} - e^{-i \cdot \alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha - (\cos\alpha - i \cdot \sin\alpha) = 2 \cdot i \cdot \sin\alpha$$

Dostaneme tedy :

$$-m \cdot \omega^2 = k \cdot \left(2 \cdot i \cdot \sin\frac{q \cdot a}{2} \right)^2 = k \cdot (2 \cdot i)^2 \cdot \sin^2\frac{q \cdot a}{2} = -4k \cdot \sin^2\frac{q \cdot a}{2}$$

Po vydělení rovnice (- m) můžeme odmocnit a dostaneme (smysl mají jen kladné hodnoty úhlové frekvence) :

$$\boxed{\omega = 2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \left| \sin\frac{q \cdot a}{2} \right|}$$

disperzní relace

Tento vztah definuje možné hodnoty úhlové frekvence kmitů (vln), které se mohu šířit řetězcem v závislosti na jejich úhlovém vlnočtu :

$$\boxed{\omega = \omega(q)}$$

Pozn. : Uvážíme-li vztahy, které platí pro úhlovou frekvenci a úhlový vlnočet :

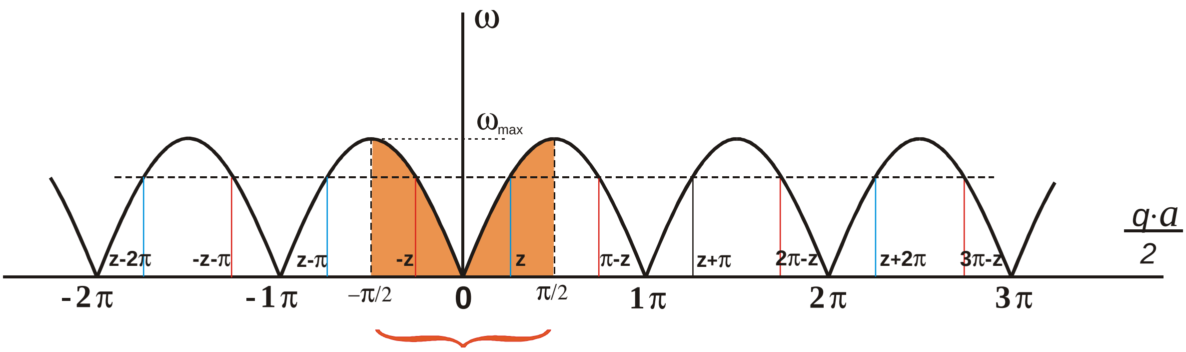
$$q = \frac{\omega}{c} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \qquad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Potom je zřejmé, že disperzní relace určuje závislost fázové rychlosti c na vlnové délce λ vlnění : Pouze v případě, že jde o přímou úměru :

$$\omega = konst \cdot q$$

bude fázová rychlost konstantní (a rovná konstantě přímé úměry). V každém jiném případě je tato rychlost nějakou funkcí vlnové délky – jako například rychlost světla ve skle – kdy pak na skleněném hranolu můžeme pozorovat optický ***disperzní jev*** – paprsky různých barev se ohýbají pod různými úhly - vzniká světelné ***spektrum***.

Grafické znázornění této rovnice nám dobře dokumentuje její vlastnosti : funkce na pravé straně je definována na celém intervalu reálných čísel od mínus do plus nekonečna a v proměnné $qa/2$ je periodická s periodou π .



1. Brillouinova zóna

Proto jedné hodnotě úhlové frekvence odpovídá nekonečně mnoho hodnot úhlového vlnočtu, kladných i záporných, které ovšem, jak si ukážeme, vedou ke stejnému fyzikálnímu řešení :

Předpokládejme určitou úhlovou frekvenci ω a označme příslušnou hodnotu proměnné $qa/2$ z intervalu **napravo od nuly** $(0,\ \pi/2)$ jako :

$$\boxed{\frac{q\,a}{2} = z}$$

Z této rovnice vypočítáme :

$$q\,a = 2z$$

Dosadíme do fázového zpoždění :

$$q \cdot n \cdot a = n \cdot q\,a = n \cdot 2z$$

A můžeme vyjádřit kmity hmotných bodů :

$$\boxed{x_n = A \cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - q\cdot n\cdot a)} = A \cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - 2nz)}}$$

Dostali jsme tím rovnici ***postupného vlnění*** s úhlovým vlnočtem q , které se šíří po lineárním řetězci v **kladném směru** osy x .

Z důvodu periodičnosti disperzní relace však stejné úhlové frekvenci ω přísluší i nekonečně mnoho dalších hodnot proměnné $qa/2$, které se liší libovolným násobkem π (l je libovolné celé kladné číslo) :

$$\boxed{\frac{qa}{2} = z \pm l \cdot \pi}$$

Z této rovnice rovněž vypočítáme :

$qa = 2z \pm 2l\pi$, kde l je libovolné celé kladné číslo

Dosadíme do fázového zpoždění :

$$q \cdot n \cdot a = n \cdot qa = n \cdot 2z \pm n \cdot 2l\pi$$

A můžeme opět vyjádřit kmity hmotných bodů:

$$x_n = A \cdot e^{\,i \cdot (\omega \cdot t - q \cdot n \cdot a)} = A \cdot e^{\,i \cdot (\omega \cdot t - 2nz \mp 2nl\pi)}$$

Rozdělíme exponencielu a **dostaneme stejnou rovnici** , která tedy popisuje stejný fyzikální stav řetězce (stejné postupné vlnění):

$$\boxed{x_n = A \cdot e^{\,i \cdot (\omega \cdot t - 2nz)} \cdot e^{\,i \cdot (\mp 2nl\pi)} = A \cdot e^{\,i \cdot (\omega \cdot t - 2nz)}}$$

Neboť n i l jsou celá čísla a tedy pro libovolný násobek 2π , kladný i záporný, se druhá exponenciela rovná jedné :

$$e^{\,i \cdot (\mp 2nl\pi)} = \cos(\mp 2nl\pi) + i \cdot \sin(\mp 2nl\pi) = 1 + i \cdot 0$$

Ale dále – pro stejnou úhlovou frekvenci ω zvolme příslušnou hodnotu proměnné $qa/2$ z intervalu **nalevo od nuly** , tj. $(-\pi/2,\ 0)$ - z důvodu symetrie funkce sinus bude tato hodnota stejná, ale opačného znaménka :

$$\boxed{\frac{qa}{2} = -z}$$

Z této rovnice opět vypočítáme :

$$qa = -2z$$

Dosadíme do fázového zpoždění :

$$q \cdot n \cdot a = n \cdot qa = -n \cdot 2z$$

A opět vyjádříme kmity hmotných bodů :

$$\boxed{x_n = A \cdot e^{\,i \cdot (\omega \cdot t - q \cdot n \cdot a)} = A \cdot e^{\,i \cdot (\omega \cdot t + 2nz)}}$$

A pozor – rovnice je už jiná – popisuje proto také **jinou fyzikální situaci** :

Je to sice také rovnice ***postupného vlnění*** o stejné frekvenci i amplitudě, ale fáze kmitů má opačné znaménko – není to tedy fázové zpoždění (kmitů hmotných bodů, které jsou na řetězci více vpravo, ale fázové předbíhání – to zjevně nastane, jestliže se vlnění na řetězci **šíří opačným směrem** (zprava doleva, v záporném směru osy x).

Opět k této hodnotě proměnné $qa/2$ patří ještě nekonečně mnoho dalších hodnot , které se liší libovolným násobkem π :

$$\boxed{\frac{qa}{2} = -z \pm l \cdot \pi}$$

Analogickým výpočtem opět ukáže, že se kmity hmotných bodů nezmění.

Vypočítáme :

$$qa = 2\pi - 2z$$

Dosadíme do fázového zpoždění :

$$q \cdot n \cdot a = n \cdot qa = n \cdot 2\pi - n \cdot 2z$$

A vyjádříme kmity oscilátorů :

$$x_n = A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - q \cdot n \cdot a)} = A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - 2n\pi + 2nz)}$$

Rozdělíme exponencielu a jako v minulém odstavci bude její druhá část rovna jedné - dostaneme opět rovnici pro opačně postupující vlnění :

$$\boxed{x_n = A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + 2nz)} \cdot e^{i \cdot (-2n\pi)} = A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + 2nz)}}$$

Celkem :

Dokázali jsme, že v řetězci lineárních harmonických oscilátorů nedochází ke změně časového průběhu kmitů – mění se pouze fáze kmitů - a vzniká tak ***postupné vlnění*** , které se po řetězci může šířit **oběma možnými směry** (orientacemi).

Přitom k popisu všech fyzikálně odlišných kmitavých stavů řetězce vystačíme s hodnotami proměnné $qa/2$ jen z první Brilouinovy zóny, tj. z intervalu $(-\pi/2, +\pi/2)$.

Tedy z intervalu úhlových vlnočtů :

$$\boxed{-\frac{\pi}{a} \leq q \leq +\frac{\pi}{a}}$$

první Brilouinova zóna

Pozn. 1 : Nalevo i napravo od 1. Brilouinovy zóny pak pokračují její vyšší řády, ve kterých se však fyzikální stavy řetězce jen opakují. V teorii akustických kmitů pevných látek je pojem Brilouinových zón velmi důležitý, u prostorových struktur reálných krystalů tvoří tyto zóny ovšem složité trojrozměrné útvary.

Pozn. 2 : Všimněme si ještě jedné zajímavé vlastnosti kmitů řetězce :Zatím jsme použili důležité vlastnosti funkce sinus – periodičnosti a symetrie, je to ale také funkce omezená - je tedy také omezená i úhlová frekvence kmitů – její možné hodnoty proto leží v intervalu od nuly do maximální hodnoty (dané maximální hodnotou funkce sinus) :

$$\boxed{\omega_{max} = 2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Řetězec oscilátorů tedy můžeme tedy také považovat za jakýsi filtr, propouštějící pouze frekvence z uvedeného intervalu $(0, \omega_{max})$.

Ke stanovení konkrétních hodnot úhlové frekvence a úhlového vlnočtu postupného vlnění je pak dále nutno aplikovat příslušné ***okrajové podmínky*** řetězce - tj. jeho „navázání“ na okolní reálná tělesa.

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 05/2008**