Alexander Michailovič Ljapunov

(1857-1918)

Semestrální práce - HKUI

Růžička Ondřej - 2018

Biografie:

Alexander Michailovič Ljapunov se narodil v Jaroslavli. Jeho otec byl ředitelem tamnějšího Demidovského lycea a zabýval se astronomií a díky tomu měla rodina Ljapunů velkou knihovnu. Alexander a jeho dva bratři - Sergej a Boris dostali základní vzdělání doma. Matka Sofie Alexandrovna učila děti humanitním vědám, hudbě a literatuře, otec je učil matematice a zeměpisu. Všichni tři synové se stali slavnými ve svých oborech: Alexander jako matematik, Sergej jako skladatel a Boris jako slavista.

Když bylo Alexanderovi jedenáct let, tak jeho otec zemřel a ne dlouho poté se rodina přestěhovala do Nižšího Novgorodu, kde v roce 1870 Alexander nastoupil do třetího ročníku gymnázia Nižšího Novgorodu a na podzim roku 1876 ho dokončil a získal zlatou medaili za vynikající prospěch. Již v 19 letech znal latinu, řečtinu, francouzštinu, angličtinu a němčinu.

Na podzim roku 1876 nastoupil Alexander na univerzitu v St. Petersburgu na katerdu přírodních věd Fyzikální a matematické fakulty, ale po měsíci přešel na katedru matematiky. Ljapunova diplomová práce byla věnována problému P.L. Chebyševa o rotaci tekutiny kolem osy. Po publikaci diplomové práce se v matematickém světě stal slavným. Řešení problému bylo uznáno jako brilantní a originální.

V Charkově byl mladý Ljapunov sám, daleko od svých příbuzných a od své milované Natashy, Natálie Rafailovny Sečenové. Byli přátelé již od dětství a přestože to byla jeho sestřenice, tak se stala jeho životní láskou. Během zimních prázdnin se dostal do Petrohradu, a 17. ledna1886 se s Natálií vzali. V červnu 1886 cestovali Německem, Švýcarskem, Rakouskem a Srbskem. Srbsko navštívili kvůli Nataše, která se zabývala překlady ze srbštiny a chtěla se setkat se srbskými filology a spisovateli. Alexander se musel setkat se zahraničními matematiky. Do té doby se bavil pouze se slavným Henri Poincarem.

Začal vyučovat na Charkovské univerzitě na katedře mechaniky. Měl jasný a přesný styl prezentace materiálu, vysoká vědecká úroveň a skromnost ho činila velmi oblíbeným v prostorech Charkovské univerzity.
Na Charkovské univerzitě Ljapunov kombinuje výuku s vědeckou prací. Jeho doktorská práce byla věnována teorii pohybové stability. Ve 35 letech čili rok poté, co obhájil svojí doktorskou práci se stal profesorem na Charkovské univerzitě, kde je přidělen ke kurzu pravděpodobnosti. V této oblasti začal výzkum a díky tomu je nyní po něm pojmenovaná věta, kterou dokázal za mnohem obecnějších podmínek než jeho předchůdci.

V roce 1894 zemřel Pafnuti L. Chebyšev, vynikající ruský vědec, Ljapunovův učitel. Ljapunov ho obdivoval a ve vzpomínce na svého učitele věnoval článek a také přeložil tři díla z francouzštiny.

Vynikající vědecké výsledky, které Ljapunov předal světu jsou uznávány Akademií věd a 44-letý profesor profesor na Charkovské univerzitě se stává akademikem na katedře aplikované matematiky. Charkovská matematická společnost ho prohlašuje za svého čestného člena. Po 17 letech ukončuje své působení na Charkovské univerzitě a 45-letý akademik se stěhuje do Petrohradu.

V hlavním městě se Alexander podílí na velkém projektu vydavatelských prací velkého Leonarda Euulera, progresivního ruského akademika, který podepsal "poznámku 342 vědců", kterou poslal prezidentu Akademie věd Konstantinovi Konstantinoviči. Bylo to důstojné odmítnutí akademiků velkoknížete.

Na IV. mezinárodním matematickém kongresu, kde byl Ljapunov vyslán Akademií věd, měl jako doprovod svoji ženu. Po kongresu se vydali na cestu po Itálii, Rakousku, Německu a dnešním Polsku. V Petrohradu žil Alexander s Natálií v akademickém domě na břehu Něvy. Jeho žena, které zeslábly plíce, potřebovala mírnější klima. Lékaři jim doporučovali Švýcarsko. Několik dní žili na břehu Ženevského jezera, ale nakonec se vracejí do Ruska, kde se stěhují na vesnici. V roce 1913 se přesunuli na jih. Mořský vzduch, jižní klima bohužel jeho lásce moc nepomohl. V Oděse žil pár s Alexanderovým bratrem Borisem, profesorem slovanské filologie na Odessově univerzitě.

V červnu 1917 se zdraví Natálie zhoršilo tak, že už mohla jen ležet. Nemohli se vrátit do Petrohradu, došlo k revoluci a začala občanská válka. Kvůli nedostatku finančních prostředků byl Alexander pozván na univerzitu v Oděse a na podzim roku 1918 začal přednášet a díky tomu získal plat profesora.

Zde pokračoval ve své vědecké práci ztěžka, jelikož ho tížilo vědomí, že se jeho žena nevyléčí a zanedlouho zemře. 31. října Natálie zemřela. Alexander ztratil důvod žít, postřelil se a o 3 dny po smrti jeho ženy 3. listopadu umírá. Spolu byli pohřbeni ve stejném hrobě.

Tragicky skončil život velkého ruského matematika Alexandra Michailoviče Ljapunova. Jeho jméno je spojeno se vznikem moderní teorie rovnovážné stability, teorie rotačních čísel rovnoměrně proudící tekutiny a teorie stability.

Odkaz díla:

Ljapunova teorie stability

Uvažujeme nařízený dynamický systém, modelovaný rovnicí

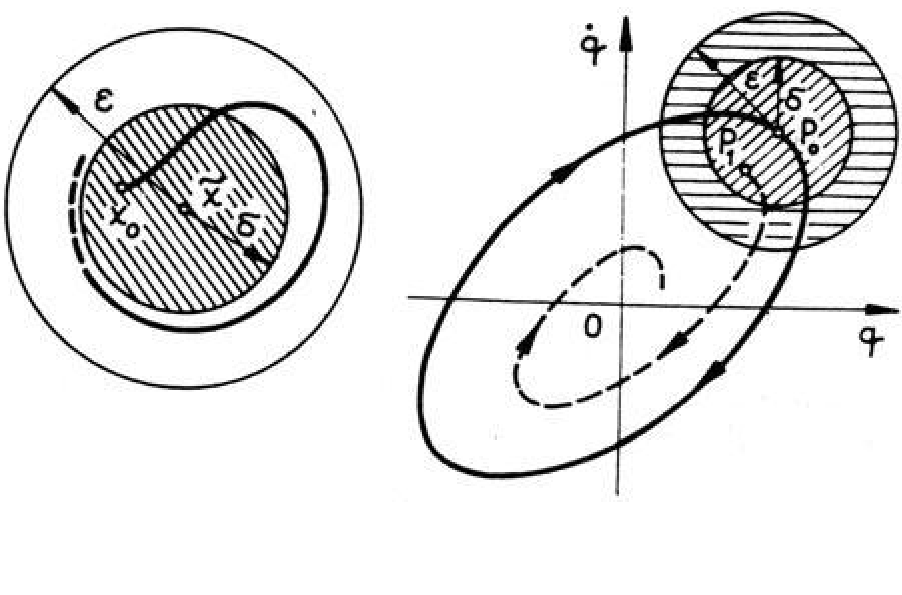
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), t\right) \qquad (3.1)$$

nebo jedná-li se o autonomní systém, rovnicí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right) \qquad (3.2)$$

Budeme vyšetřovat podmínky, za kterých bude rovnovážný stav systému $\tilde{\mathbf{x}}$ stabilní. O funkcích $f_i(\mathbf{x}, t)$ předpokládejme, že jsou spojité a že mají spojité derivace podle proměnných $x_i \left(i = 1, 2, \ldots n\right)$.

Nechť $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ představuje řešení stavové rovnice v čase t při počátečních podmínkách $\mathbf{x}_0$ v čase t_0. Nejprve budeme definovat **stabilitu rovnovážného stavu.**



Obr. 3.1

Podle Ljapunova je rovnovážný stav $\tilde{\mathbf{x}}$ neřízeného dynamického systému stabilní, jestliže pro každou reálnou hodnotu $\varepsilon > 0$ existuje takové reálné číslo $\delta \equiv \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, pro které platí, že při

$\left\| \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}} \right\| \le \delta$ je

$$\left\| \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t) - \tilde{\mathbf{x}} \right\| \le \varepsilon \quad \text{pro} \quad t > t_0 \tag{3.3}$$

Symbolem $\| \ \|$ je označena norma matice. Smysl tohoto tvrzení je patrný z obr. 31a. Rovnovážný stav je stabilní, když po malém vychýlení z tohoto stavu (vlivem „poruch" amplitud nebo fází) zůstane trajektorie zastupujícího bodu systému v okolí ε rovnovážného stavu. Podle této definice nemusí trajektorie zastupujícího bodu v čase $t \to \infty$ nutně dosáhnout rovnovážného stavu $\tilde{\mathbf{x}}$, ale musí setrvat v předepsané blízkosti tohoto stavu.

Rovnovážný stav autonomního systému je **asymptoticky stabilní**, je-li stabilní ve smyslu Ljapunovy definice a každý pohyb, vycházející ze stavu $\mathbf{x}_0$, dostatečně blízkého stavu $\tilde{\mathbf{x}}$, konverguje v čase $t \to \infty$ ke stavu $\tilde{\mathbf{x}}$

Stabilitu periodického řešení budeme chápat jako stabilitu pohybu podél určité trajektorie, kterou je v případě periodických řešení limitní cyklus. Sledujeme, zda bod P_1 (reprezentující okamžitý stav systému), který se pohybuje po trajektorii blízké limitnímu cyklu, zůstává trvale ve zvolené oblasti ε, která obsahuje oblast viz obr. 3.1b. Bod P_0, reprezentující střed oblastí δ i ε, se přitom pohybuje po limitním cyklu. Zůstává-li pro každé $t > t_0$ bod P_1 trvale v oblasti, je periodické řešení ve smyslu Ljapunovovy definice (3.3) stabilní.

Při analýze **stability odezvy řízených (buzených) systémů** je minimálním požadavkem pro stabilitu ohraničený vstup a výstup a stabilita periodického řešení neřízeného systému (včetně stability počátečních podmínek).

3.2 Určování podmínek stability pro rovnovážné stavy systémů

Uvažujeme autonomní dynamický systém, popsaný stavovou rovnicí (3.2), kterou lze rozepsat na soustavu rovnic

$$\dot{x}_i = f_i\left[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right], \quad i = 1, 2, ...n$$

(3.4)

kde f_i jsou obecně nelineární funkce. Hodnoty rovnovážných stavových veličin $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_n(t),$ dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$\dot{x}_i = f_i\left[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right] = 0, \quad i = 1, 2, ...n \qquad (3.5)$$

Nyní definujeme **poruchy** $\xi_i(t)$ **jako malé odchylky od rovnovážného stavu**. Pohyb systému kolem rovnovážných hodnot stavových veličin pak definují rovnice:

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) + \xi_1(t), x_2(t) = \tilde{x}_2(t) + \xi_2(t), ..., x_n(t) = \tilde{x}_n(t) + \xi_n(t), \qquad (3.6)$$

Podle Ljapunovovy definice asymptotické stability bude rovnovážný stav systému stabilní, budou-li splněny relace $\lim_{t \to \infty} x_i(t) \to \tilde{x}_i$ pro všechny *i*. Dosadíme vztahy (3.6) do rovnic (3.5). Po rozvinutí funkcí $f_i[...]$ do Taylorových řad v okolí hodnot $\tilde{x}_i$ a po zanedbání vyšších členů rozvojů od druhého řádu výše, dostaneme soustavu rovnic

$$\dot{\xi}_i(t) = a_{i1}\xi_1(t) + a_{i2}\xi_2(t) + ... + a_{in}\xi_n(t), \quad i = 1, 2, ...n$$

nebo stručně v maticovém zápisu

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \mathbf{A}(t)\,\xi(t)$$ (3.7)

kde $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$, kde $a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}}$

Řešení soustavy (3.7) je známé a rovno $\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$; po jeho dosazení do (3.7) a po vyloučení triviálního řešení dostaneme maticovou formulaci problému vlastních hodnot matice **A**:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\,\xi_0 = 0$$ (3.8)

Jak je známo, tato rovnice má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, je-li determinant matice soustavy roven nule. Ljapunov dokázal, že **rovnovážný stav systému, charakterizovaný hodnotami** $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots\ldots, \tilde{x}_n(t)$, **je stabilní, jsou-li reálné části všech vlastních hodnot** λ_i **záporné**, tj. když platí

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0,\; i = 1, 2, \ldots., n$$ (3.9)

Splnění nerovnosti (3.9) je totožné s požadavkem záporného znaménka reálných částí všech kořenů tzv. charakteristické rovnice, definované jako

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$ (3.10)

kterou lze rozepsat do tvaru

$$d_0\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n = 0$$ (3.11)

Aby nebylo zapotřebí často pracně počítat kořeny polynomu (3.11), byla sestavena kritéria, podle nichž lze určit znaménka.

Podle **Routh-Hurwitzova kritéria** budou mít reálné části kořenů charakteristické rovnice záporné znaménka, budou-li:

· všechny koeficienty charakteristické rovnice kladná čísla;

· budou-li splněny následující determinantní nerovnosti:

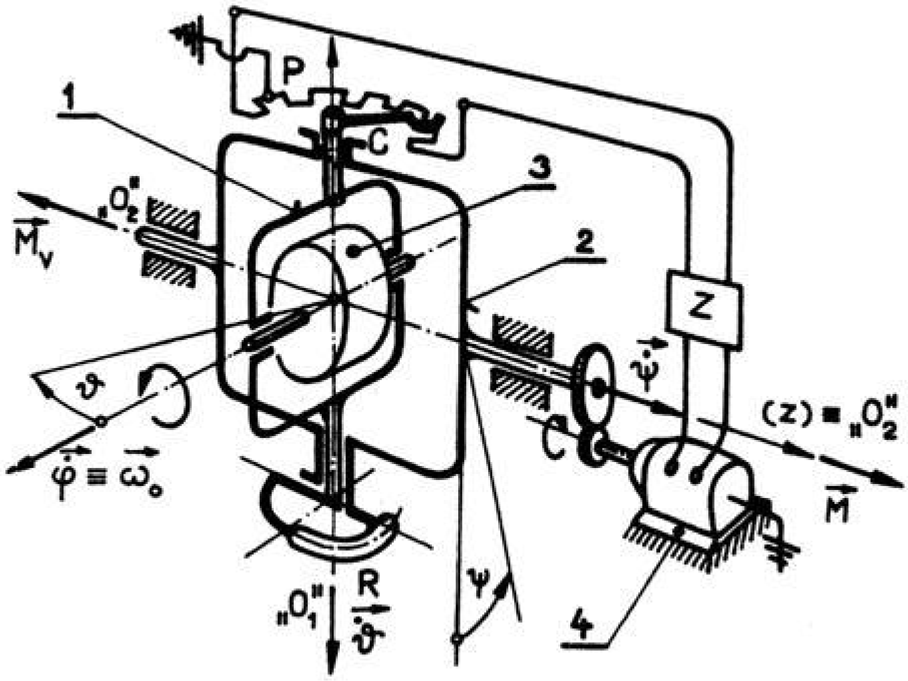
$$\Delta_1 \equiv d_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} d_1 & d_5 & d_5 & .. \\ d_0 & d_2 & d_4 & .. \\ 0 & d_1 & d_3 & .. \\ 0 & d_0 & d_2 & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & d_n \end{vmatrix} > 0$$ (3.12)

Pro systémy s větším počtem stupňů volnosti je analýza vlastností determinantů (3.12) dosti nepřehledná. Hledaly se proto jednodušší formulace. Tak například podle **Liénardova kritéria** postačí – při splnění prvé Routh – Hurwitzovy podmínky – aby byly splněny „pouze“ následující determinantní nerovnosti:

$$\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \ldots,\ \Delta_1 > 0,$$ (3.13)

kde determinanty Δ jsou definovány stejně jako v rovnici (3.12). Ilustrujme si vyloženou problematiku následujícím příkladem.

Analyzujme činnost gyroskopického stabilizátoru polohy, znázorněného na obr. 3.2. Na rám 2 nechť působí vnější moment M_v, který má být ve svých účincích na gyroskop kompenzován pomocí momentu $M_m = K\upsilon, (K = konst.)$ vyvozovaného motorem 4. Toho se dosáhne tím, že potenciometr P, jehož kontakt C se otáčí spolu s osou 0_1, oddělí napětí, které se zesiluje v zesilovači Z a přivádí se na svorky motoru. (je-li kontakt C v neutrální poloze, je $u_0 = 0$ a také $M_m = K\upsilon = 0$). Tlumící moment je roven $M_T \doteq R\dot{\upsilon}$ (*R* - Rayleighova konstanta).



Obr. 3.2

Pohybové rovnice gyroskopického systému na obr. 3.2 jsou:

$$A_1\ddot{\psi} + B\omega_0\left(\dot{\upsilon} + \omega_1\right) = -M_v + M_m \doteq -M_v + K\upsilon$$
$$A_2\ddot{\upsilon} + R\dot{\upsilon} + B\omega_0\left(\dot{\psi} + \omega_2\right) = 0$$

(3.14)

kde význam označení je stejný jako v technických rovnicích gyroskopu a ω_1, ω_2 jsou úhlové rychlosti rámu 1 a 2. Doplníme-li rovnice (3.14) identitou $\dot{\upsilon} = \dot{\upsilon}$, lze zapsat ve tvaru stavové rovnice řízeného dynamického systému:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \dot{\upsilon}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{R}{A_2} & -\frac{B\omega_0}{A_2}\\ \frac{K}{A_1} & \frac{B\omega_0}{A_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \dot{\upsilon}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{B\omega_0\omega_2}{A_2}\\ \frac{B\omega_0\omega_1-M_v}{A_1}\end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Rovnovážné řešení dostaneme, položíme-li stranu rovnice (3.15) rovnu nule. Tím dostaneme soustavu algebraických rovnic, která má řešení:

$$\tilde{\upsilon}=-\frac{B\omega_0\omega_1-M_v}{k},\ \ \tilde{\dot{\upsilon}}=0,\ \ \tilde{\dot{\psi}}=0 \tag{3.16}$$

Systém se ustálí na výchylce, která může být nulová v případě, že $M_v=\omega_0\omega_1$. Koeficienty a_{ij} matice **A**, viz rov. (3.7), budou:

$$a_{11}=a_{13}=a_{21}=a_{33}=0, a_{22}=-\frac{R}{A_2}, a_{23}=-\frac{B\omega_0}{A_2}, a_{31}=\frac{K}{A_1}, a_{32}=\frac{B\omega_0}{A_2}$$

Charakteristická rovnice typu (3.11) bude

$$\lambda^3+\lambda^2\frac{R}{A_2}+\lambda\frac{(B\omega_0)^2}{A_1A_2}+\frac{B\omega_0K}{A_1A_2}=0 \tag{3.17}$$

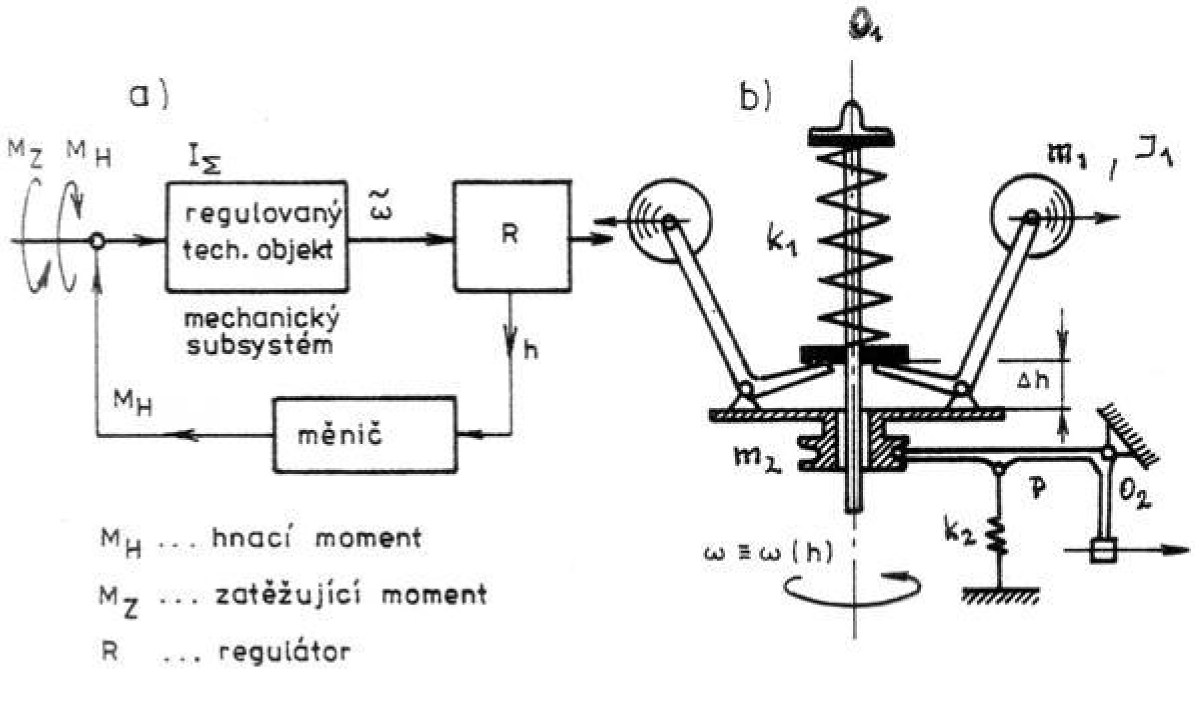
a je zřejmé, že její koeficienty jsou kladné (je to nutné i z fyzikálních důvodů). Z determinantních nerovností (3.12) pak plynou následující podmínky:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1 \equiv \frac{R}{A_2} > 0 && \Rightarrow R > 0 \\
&\Delta_2 \equiv \frac{R}{A_2}\frac{\left(B\omega_0\right)^2}{A_1A_2} - \frac{B\omega_0K}{A_1A_2} > 0 && \Rightarrow R > \frac{K}{B\omega_0} \\
&\Delta_3 \equiv \frac{B\omega_0K}{A_1A_2}\left(\Delta_2\right) > 0 && \Rightarrow \frac{B\omega_0K}{A_1A_2} > 0
\end{aligned}
$$

(3.18)

Na základě rozboru výsledků (3.18) lze tedy učinit závěr, že vhodnou volbou tlumící konstanty R lze vždy dosáhnout stability řešení. Netlumený systém by byl nestabilní. Aby se u skutečných systémů tohoto typu eliminoval vliv úhlové rychlosti ω_1 na výchylku $\tilde{\vartheta}$, užívá se dvou stejných gyroskopů, uložených rovnoběžně ve společném rámu. Pohyb těchto gyroskopů pak je mechanicky vázán.

Výsledky analýzy stability se uplatňují i ve speciálních odvětvích dynamiky systémů, například v teorii regulace. Jako příklad uvedeme Hartnellův regulátor, znázorněný na obr. 3.3.



Obr. 3.3

Parametry potřebné pro výpočet jsou znázorněny ve výpočtovém schématu a představují: m_1 hmotnost vyvažovacího závaží, I_1 moment setrvačnosti úhlové páky včetně závaží k ose 0_1, I_2 moment setrvačnosti páky P k ose 0_2, m_2 hmotnost přestavovací objímky, k_1 tuhost pružiny regulátoru a k_2 tuhost vyrovnávací sílu regulátoru zanedbáme.

Okamžitou hodnotu kinetické energie můžeme vyjádřit

$$E_k\left(h,\dot{h}\right) = 2\left[\frac{m_1}{2}\left(e + l\sin\varphi\right)^2 \omega^2 + \frac{I_1}{2}\dot{\varphi}^2\right] + \frac{m_2}{2}\dot{h}^2 + \frac{I_2}{2}\dot{\psi}^2$$
$$\approx m_1\left(e + \frac{l}{r}h\right)^2 \omega^2 + \frac{I_1}{2}\frac{\dot{h}^2}{r^2} + \frac{m_2}{2}\dot{h}^2 + \frac{I_2}{2}\frac{\dot{h}^2}{p^2}$$

(3.1

9)

když jsme položili

$$\dot{\varphi} \doteq \frac{h}{r},\ \sin\varphi \doteq \varphi,\ \cos\varphi \doteq 1$$

Potenciální energie systému, označíme-li předpětí v pružinách s_1 a s_2, definuje rovnice:

$$E_p\left(h\right) = E_{p0} + 2m_1 g l\cos\varphi + m_2 g h + \frac{k_1}{2}\left(h + s_1\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{g}{p}h + s_2\right)^2$$

(3.2

0)

Dosadíme-li vztahy (3.19) a (3.20) do Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{h}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial h} + \frac{\partial E_p}{\partial h} = 0$$

dostaneme pohybovou rovnici regulátoru:

$$\left(m_1+\frac{I_1}{r^2}+\frac{I_2}{p^2}\right)\ddot{h}+\left[k_1+k_2\left(\frac{q}{p}\right)^2-\frac{2mgl}{r^2}-\frac{2m\omega^2l^2}{r^2}\right]h+$$
$$+\left(m_2g+k_1s_1+k_2\frac{q}{p}s_2\right)=\frac{2lme}{r}\omega^2$$

(3.21)

Tato rovnice je nelineární, neboť obě proměnné, *h* i *ω*, v ní vystupují v součinu. Omezíme-li se na vyšetřování „malých“ výchylek kolem rovnovážné polohy $\tilde{\omega},\tilde{h}$, tj. vyšetřujeme-li pohyby

$$\omega(t)=\tilde{\omega}+\Delta\omega(t),\ h(t)=\tilde{h}+\Delta h(t),\ \Delta\omega\ll\tilde{\omega},\ \Delta h\ll\tilde{h}$$

(3.22)

lze rovnici (3.21) linearizovat. Regulační proces linearizovaného systému je totiž mnohem jednodušší a lze jej přehledně sledovat pomocí blokového schématu na obr. 3.3c. Nechť se regulované zařízení otáčelo v čase $t<0$ úhlovou rychlostí ω_0. Když na ně v čase $t=0$ začne působit brzdný moment $M_B(t)$, změní se otáčky o Δω a objímka regulátoru se posune z rovnovážného stavu o Δ*h*. Posuv objímky způsobí prostřednictvím měniče zvětšení rychlosti hřídele regulátoru, na který začne působit hnací moment $M_H(t)$. Veličiny Δω, Δ*h* a moment $M_H(t)$ jsou funkcemi času a jejich vzájemnou souvislost můžeme vyjádřit simultánními diferenciálními rovnicemi

$$I_\Sigma\Delta\dot{\omega}(t)=M_H(t)-M_B(t)$$
$$\Delta\omega(t)=A\Delta\ddot{h}(t)+B\Delta\dot{h}(t)+C\Delta h(t)$$
$$M_H(t)=K\Delta h(t)$$

(3.23)

kde I_Σ je momentem setrvačnosti hmot, rotujících s hřídelem regulátoru a *A, B, C, K* jsou konstanty. Přitom druhou rovnici soustavy (3.23) definujeme na základě rovnice (3.21).

Derivujeme-li nyní druhou rovnici soustavy (3.23) podle času a dosadíme-li ji za Δω do prvé rovnice, dostaneme s ohledem na třetí rovnici (3.23) a po úpravě:

$$I_{\Sigma}\left[A\Delta\dddot{h}(t)+B\Delta\ddot{h}(t)+C\Delta\dot{h}\right]+K\Delta h(t)=M_{B}(t)$$ (3.24)

Tři integrační konstanty, nutné pro řešení této rovnice, získáme z počátečních podmínek, například $\Delta\omega(0)=\Delta h(0)=\Delta\dot{h}(0)=0$. Charakteristická rovnice modelu (3.24) má pak tvar

$$A\lambda^{3}+B\lambda^{2}+C\lambda+\frac{K}{I_{\Sigma}}=0$$ (2.25)

O řešení rovnic typu (3.25) je známo, že mají vždy jeden kořen reálný. Podmínkou stability řešení je, aby rovnice (3.25) měla všechny kořeny reálné záporné nebo jeden kořen reálný záporný a dva kořeny sdružené s reálnou zápornou částí. Výběr parametrů systému, za kterých je těmto požadavkům vyhověno, pak určíme na základě rozboru Routh-Hurwitzových podmínek.

Poznámka:

Před tím, než se Ljapunov oženil, tak se celý jeho život točil jen okolo vědy. Neměl problém bdít do 4. až 5. hodiny ranní a časem se obešel i bez spánku. Díky tomu navenek působil uzavřeně a zasmušile. Díky svým úvahám si zřídka všímal okolí.

Zdroje informací

http://biography-peoples.ru/index.php/l/item/432-lyapunov-aleksandr-mikhajlovich

https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/117070/CasPestMat_078-1953-1_21.pdf

http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/SimDSoust/kapitola_3.html