

Cesta k elektromagnetickému poli

Elektrické pole

Přesněji řečeno, jde o pole elektrostatické, tj. silové pole, vyvolanému existencí klidových nábojů. (Z mechaniky ovšem víme, že pojmy klidu a pohybu jsou relativní, závisejí na volbě souřadné soustavy.)

Základní fyzikální veličinou je elektrický náboj (jednotka 1 Coulomb), který má zejména tyto důležité vlastnosti:

- 1) Neexistuje „sám o sobě“, ale je vždy spojen s materiálním (hmotným) objektem. Nejmenší takové objekty jsou tzv. mikročástice, elektrický náboj je jednou z jejich základních vlastností.
- 2) Je „nezničitelný“ (platí zákon zachování náboje).
- 3) Je násobkem elementárního náboje $e=1,602 \cdot 10^{-19}$ C (tzv. kvantování náboje)
- 4) Nemění se při transformacích vztažné soustavy souřadnic (invariantnost náboje)
- 5) Účinky více nábojů se sčítají (princip superpozice)
- 6) Silové účinky elektrického náboje popisuje:

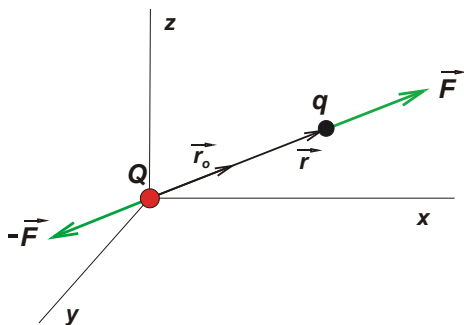
Coulombův zákon (1785)

Bodový (centrální) náboj velikosti Q , umístěný ve vakuu v počátku soustavy souřadnic, působí na druhý bodový (zkušební) náboj velikosti q , který je v místě \vec{r} , silou :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

kde ϵ_0 je univerzální konstanta permitivita vakua a \vec{r}_0 je jednotkový vektor průvodiče :

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$



Platí samozřejmě zákon akce a reakce - náboj q působí na náboj Q silou stejně velikou, ale opačně orientovanou, tj. $-\vec{F}$.

Vidíme také, že Coulombův zákon je formálně (matematicky) shodný s gravitačním Newtonovým zákonem, obě síly – elektrostatická i gravitační - směřují vždy do jednoho bodu – silového centra a v obou případech také používáme pojem „silové pole“.

Říkáme tedy, že náboj Q vytváří ve svém (nekonečném) okolí elektrostatické pole, které je, stejně jako gravitační pole, centrálním silovým polem.

Pro jeho jednoznačný popis definujeme vektorovou veličinu :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

intenzita elektrického pole

$$[\text{N/C} = \text{J/m.C} = \text{V/m}]$$

Slovní vyjádření : Intenzita elektrického pole udává (číselně) sílu působící v tomto poli na jednotkový zkušební náboj

Dále prozkoumejme, zda je elektrostatické pole konzervativní, jako pole gravitační:

Vypočítejme tedy práci potřebnou k (velmi pomalému) přenesení bodového náboje q (v elektrickém poli náboje Q v počátku souřadnic), po nějaké dráze s z počátečního bodu \vec{r}_1 do koncového bodu \vec{r}_2 .

Protože toto silové pole působí na zkušební náboj (těleso) silou \vec{F} , my musíme působit na těleso (vnější) silou stejně velikou a opačně orientovanou, tj. $-\vec{F}$, abychom sílu pole překonali

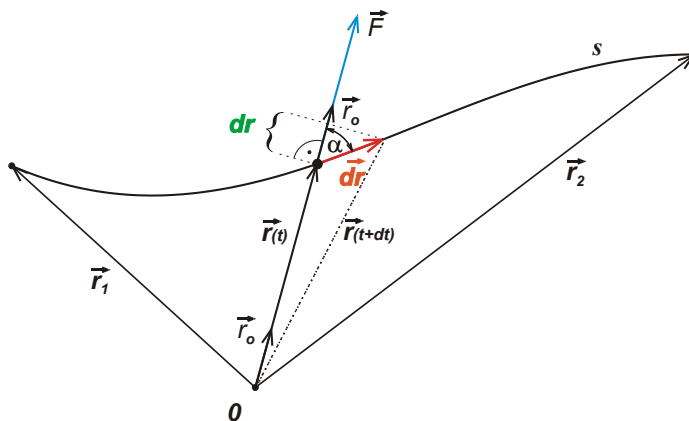
Základní vztah pro práci vykonanou v silovém poli při pohybu náboje (tělesa) na dráze s (práci vykonanou námi, tj. vnější silou vzhledem k danému poli) tedy je :

$$A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{\textit{práce vnější síly v silovém poli (obecně)}}$$

Nyní dosadíme konkrétně za elektrostatickou sílu z Coulombova zákona a vytkneme konstanty před integrál :

$$A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{r}_o \right) \cdot d\vec{r} = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_o \cdot d\vec{r}$$

Situace při výpočtu práce je znázorněna na obrázku – a je naprosto stejná jako byla u gravitačního pole (porovnejte).



Upravíme dále skalární součin v integrálu - z obrázku je zřejmé, že tento skalární součin je kolmým průmětem diferenciálu průvodiče $d\vec{r}$ do směru průvodiče \vec{r} a že je tedy vlastně roven diferenciálu (přírůstku) velikosti průvodiče dr :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} = |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = dr$$

Tím se výrazně zjednoduší výpočet vykonané práce, neboť již vzniká známý integrál :

$$A = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right] = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_2} - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_1}$$

Vidíme, že – stejně jako u gravitačního pole – vykonaná práce nezávisí vůbec na dráze (na jejím tvaru), ale závisí pouze na počátečním a koncovém bodu dráhy.....

..... a při zpětném pohybu náboje q (tělesa) z koncového bodu do počátečního bodu - námi vykonanou práci „dostaneme zpět“ od elektrického pole, tj. elektrické pole vykoná přesně stejně velikou práci, a my ji můžeme využívat:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Původně vykonaná práce A je tedy jakoby uschována, zakonzervována v koncovém bodu dráhy \vec{r}_2 a těleso (silové pole) má v tomto místě schopnost vykonat práci - stejně velikou jako naše původní práce - elektrostatické silové pole je konzervativní, stejně jako pole gravitační

Stejně jako v gravitačním poli je tedy zde možno definovat elektrostatickou potenciální energii – jako příslušnou **velikost vykonané práce**

(*vykonané silovým polem při přesunu do polohy počáteční a nebo také vykonané nejprve námi - vnější silou - při původním pohybu z počátečního do koncového bodu*).

Potenciální energie je jednoznačnou funkcí místa \vec{r}_2 (jako proměnná ve funkci je zcela libovolným bodem v prostoru, píšeme ho tedy obecně bez indexu jako \vec{r}) a samozřejmě také funkcí místa \vec{r}_1 (zde index ponecháme, neboť při konkrétním použití se předem zvolí a ve funkci vystupuje jako parametr).

Bodový náboj q má tedy v daném místě \vec{r} vzhledem k místu \vec{r}_1 potenciální energii :

$$W_p(\vec{r}, \vec{r}_1) = A = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad \text{elektrostatická potenciální energie (obecný tvar)}$$

Slovní vyjádření : je to práce, kterou vykoná elektrostatické pole při pohybu náboje q (tělesa) z daného místa \vec{r} do zvoleného výchozího místa \vec{r}_1 a je to také práce, kterou my musíme nejprve vykonat při přesunu z výchozího místa do daného místa.

V teoretických výpočtech se často – stejně jako u gravitačního pole - pro potenciální energii volí výchozí místo v nekonečnu, tj.:

$$r_1 \rightarrow \infty$$

V této limitě je potom druhý člen ve vztahu pro potenciální energii nulový - zbavíme se tak závislosti na počátečním místě náboje q (tělesa) a dostáváme velmi jednoduchý tvar :

$$W_p(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{elektrostatická potenciální energie (speciální tvar)}$$

Stanovme opět význam : je to práce, kterou vykoná elektrostatické pole při pohybu náboje q (tělesa) z daného místa \vec{r} do nekonečna a je to také práce, kterou my musíme nejprve vykonat při přesunu náboje z nekonečna do daného místa.

S využitím posledního vztahu můžeme nyní snadno zapsat původní vykonanou práci (vnější silou) při přesunu náboje q mezi dvěma místy :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1)$$

Práce potřebná pro přemístění náboje q mezi dvěma místy v elektrostatickém poli je tedy stejně jako v poli gravitačním rovna rozdílu potenciálních energií mezi těmito místy.

Nyní definujeme fyzikální veličinu elektrostatický potenciál :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_p(\vec{r})}{q} \quad \text{elektrostatický potenciál} \quad [J/C] = [V]$$

Slovní vyjádření : Je to potenciální energie (zkušební) jednotkového náboje, tedy práce vnější síly, potřebná k přenesení jednotkového náboje z nekonečna na dané místo.

Stejně jako potenciální energie je i potenciál samozřejmě jednoznačnou funkcí místa. Dosadme ještě za W_p z její definice jako vykonané práce :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{q} \cdot \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

A dostáváme zásadní vztah mezi dvěma nejdůležitějšími veličinami elektrostatického pole, dokonale odpovídající výše uvedenému slovnímu vyjádření potenciálu, neboť ve výrazu pro práci vystupuje nyní elektrická intenzita, tedy síla působící na jednotkový náboj):

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{vyjádření potenciálu jako práce intenzity pole}$$

A nyní upravíme naposled získaný vztah pro práci A vykonanou při přemístění náboje q z místa \vec{r}_1 do místa \vec{r}_2 , tj. :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1)$$

Do této rovnice dosadíme z definice potenciálu :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = q \cdot \varphi(\vec{r}_2) - q \cdot \varphi(\vec{r}_1) = q \cdot [\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)] = q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Rovnici vydělíme nábojem, použijme první integrál a poslední výraz a definici intenzity. Vznikne tak velmi užitečný vztah pro rozdíl potenciálů :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Tento rozdíl potenciálů je vlastně přírůstkem potenciálu mezi místy 1 a 2 (rozdíl hodnot funkce v koncovém a počátečním bodě) a vidíme, že je roven práci vnější síly při přesunu jednotkového náboje mezi těmito místy.

Protože se ukázalo, že rozdíl potenciálů je - zejména v praktické elektrotechnice - velmi důležitou veličinou a získal i zvláštní název napětí.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} -\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{elektrické napětí mezi místy 1 a 2}$$

Slovní vyjádření : Elektrické napětí mezi místy 1 a 2 je rovno práci, kterou vykoná el. pole při přesunu jednotkového náboje z místa 1 do místa 2.

Pomocí této fyzikální veličiny je pak možno nejjednodušším možným způsobem vyjádřit práci potřebnou pro přemístění náboje q z \vec{r}_1 do \vec{r}_2 :

$$A = q \cdot U_{21}$$

práce potřebná pro přemístění náboje q mezi místy 1 a 2

Jak vidíme, tato práce je samozřejmě q -krát větší než práce potřebná pro přemístění jednotkového náboje mezi těmito místy.

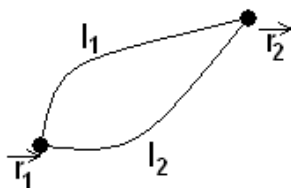
Dále se vraťme k základní vlastnosti elektrostatického pole – že práce vnější síly mezi body \vec{r}_1 a \vec{r}_2 nezávisí na dráze, tj.:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = konst.$$

Po vydělení rovnice ($-q$) pak nezávisí na dráze ani integrál

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = konst$$

Jestliže tedy zvolíme mezi body \vec{r}_1 a \vec{r}_2 dvě různé křivky (dráhy) l_1 a l_2 , bude:



$$\int_{\vec{r}_1(l_1)}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1(l_2)}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

V integrálu na pravé straně přehodíme meze (tím změni znaménko) a převedeme ho na levou stranu (opět změni znaménko):

$$\int_{\vec{r}_1(l_1)}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2(l_2)}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Součet integrálů na levé straně je dohromady integrál po uzavřené křivce $l = l_1 + l_2$, která je libovolná, stejně jako obě vytvářející křivky, vzniklý vztah tedy platí pro jakoukoliv uzavřenou křivku:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

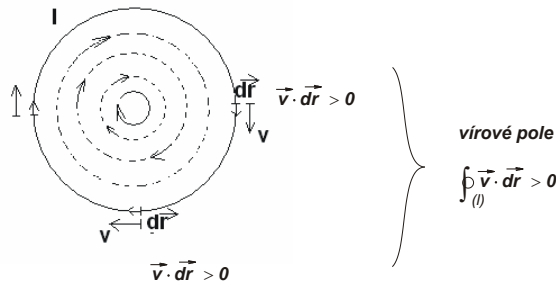
nevírovost el. pole

Pojem nevírovosti pochází z hydrodynamiky, kde se v poli rychlosti $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ často zkoumá hodnota integrálu, tzv. cirkulace vektoru rychlosti po uzavřené křivce l :

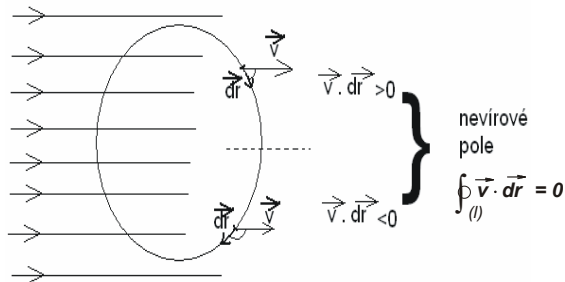
$$\oint_{(l)} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Význam tohoto integrálu vyplyne z následujících dvou příkladů :

1) Jestliže v nějakém místě kapaliny existuje vír (např. kolem výpusti, jako důsledek Coriolisovy síly), potom zřejmě platí – viz. obr.:



2) Jestliže v kapalině neexistují víry – např. když probíhá laminární proudění, potom je situace zcela jiná :



Pojmy **cirkulace vektoru** , **virové pole** a **nevirové pole** potom formálně používáme v jakémkoliv vektorovém poli, i v případě, když nepopisuje žádný reálný pohyb hmoty.

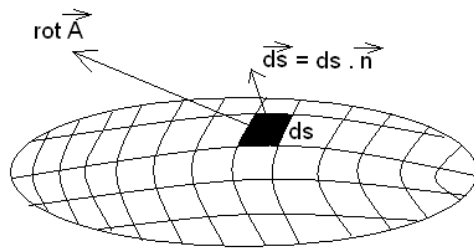
Uveďme dále matematickou **Stokesovu větu** [stouksovu], která se často používá pro úpravu integrálů typu „cirkulace vektoru“ :

Pro spojitou plocha S , ohraničenou spojitou uzavřenou křivkou l , a pro **libovolnou** spojitou **vektorovou** funkci polohy, tj. :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$$

platí vztah :

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



$n \dots$ (norm. vektor)

$$\text{rot } \vec{A} = \text{rot } A(\vec{r})$$

kde $d\vec{S}$ je orientovaný vektor plochy a $\text{rot } \vec{A}$ je **matematický operátor** nazvaný **rotace vektoru** \vec{A} , který je definovaný vztahem :

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Zcela evidentně nejde o triviální operátor, který z dané vektorové funkce vytvoří jinou vektorovou funkci, ale na rozdíl od většiny matematických operátorů má názorný (fyzikální) smysl:

- vektor $\text{rot } \vec{A}$ má směr normály k ploše, kolem které je maximální cirkulace vektoru \vec{A}
(v kapalině by určoval osu rotačního pohybu kapaliny)
- a jeho velikost je pak rovná plošné hustotě cirkulace vektoru \vec{A}
(v kapalině by určovala velikost úhlové rychlosti rotujících částic kapaliny)

Věnujme se nyní našemu vztahu nevírovosti elektrického pole:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Levou stranu upravme pomocí Stokesovy věty a dostaneme :

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Protože S je libovolná (ohraničená) plocha v prostoru, vyplývá z nulového integrálu také nulovost integrované funkce a dostáváme tak **ekvivalentní vztah** konzervativnosti elektrostatického pole:

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

nevírovost elektrostatického pole – dif. tvar

Zatímco původní definice konzervativnosti elektrického pole vyžaduje použití velkého (integrálního) úseku prostoru (dva body spojené křivkami), získaná rovnice popisuje tuto vlastnost v diferenciální (nekonečně malé) části prostoru – v daném místě prostoru.

Je to první stupínek na cestě k základním vztahům elektromagnetického pole

Gaussův zákon elektrostatiky

V elektrostatickém poli nyní stanovíme hodnotu určitého integrálu :

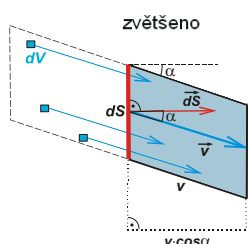
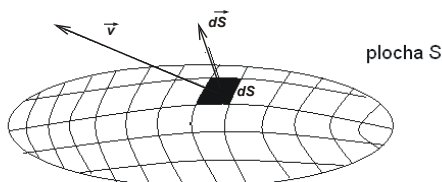
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

tok (vektoru) elektrické intenzity uzavřenou plochou S

Toto pojmenování opět pochází z hydrodynamiky , kde se často počítá analogický integrál pro vektor rychlosti kapaliny, přes plochu, která obecně nemusí být uzavřená (jen spojitá) :

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Podívejme se, na význam tohoto integrálu :



Částice kapaliny při svém pohybu protínají zvolenou plochu S . Zvětšený obrázek malé (diferenciální) části plochy dS spolu s vektorem rychlosti v daném místě nám pomůže stanovit důsledek tohoto pohybu :
 - uvědomíme-li si, že dráha částice za jednotku času je číselně rovna její rychlosti, je pak jasné, že veškerá kapalina protéká za jednotku času přes tuto malou plošku dS musí vyplnit objem (viz. obr):

$$dS \cdot v \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

A objem kapaliny proteklý za 1 času přes celou plochu S získáme sečtením – integrací – těchto výrazů přes plochu S :

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad \text{\textit{objemový tok kapaliny}}$$

Proto se každý integrál v tomto tvaru nazývá tokem vektoru \vec{A} plochou S , i když se opět - stejně jako u obecné cirkulace vektoru – nemusí jednat o reálný pohyb hmoty.

Uveďme dále matematickou větu, která se velmi často používá pro úpravu integrálů tohoto typu :

Nechť V je objem uzavřený spojitou plochou S (tzv. uzavřená plocha), pak pro libovolnou spojitou vektorovou funkci polohy, tj. :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$$

platí vztah :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV \quad \text{\textit{Gaussova (-Ostrohradského) věta matematiky}}$$

kde $d\vec{S}$ je orientovaný vektor plochy a $\operatorname{div} \vec{A}$ je matematický operátor divergence vektoru \vec{A} .
 definovaný vztahem:

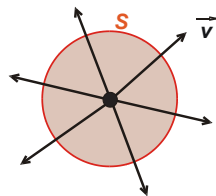
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{\textit{divergence vektoru}}$$

Vidíme, že divergence vytvoří dosti jednoduchým způsobem z vektoru (z vektorové funkce) funkci skalární a jeho fyzikální význam je také dosti jednoduchý:

- **Divergence vektoru \vec{A} je (číselně) rovna výtoku vektoru \vec{A} z jednotkového objemu v daném místě.**

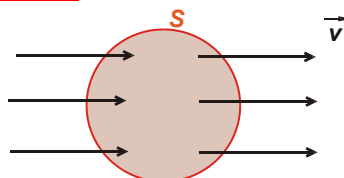
Speciálně, kdyby se jednalo o kapalinu ($\vec{A} = \vec{v}$), pak případ nenulové divergence znamená, že v daném místě je zdroj (zřídlo) kapaliny :

$$\operatorname{div} \vec{A} \neq 0 \quad \text{\textit{zřídlové pole}}$$



Nulová divergence pak samozřejmě popisuje kapalinu bez zdrojů :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad \text{\textit{nezřídlové pole}}$$



Pojmy **zřídlové pole** a **nezřídlové pole** potom opět formálně používáme v jakémkoli vektorovém poli, které i nepopisuje žádný reálný pohyb hmoty (například v silovém poli).

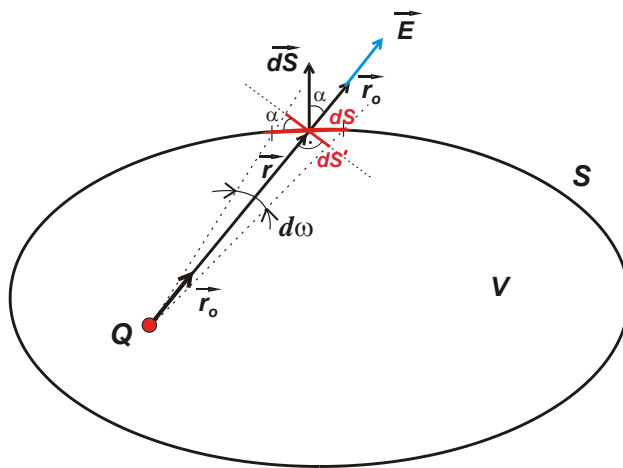
Nyní se vraťme k elektrostatice:

Předpokládejme nejprve nejjednodušší možný případ, kdy elektrické pole by bylo způsobeno jediným bodovým nábojem Q a vypočítejme tok elektrické intenzity danou uzavřenou plochou S :

Rozlišíme pak dvě možné polohy tohoto náboje vzhledem ke zvolené ploše :

1) Necht' náboj Q leží uvnitř plochy S , tj. v objemu V :

Položme pak do místa náboje počátek soustavy souřadnic a do integrálu dosadíme vztah pro elektrickou intenzitu bodového náboje :



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_o \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_S \frac{\vec{r}_o \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

Skalární součin v čitateli vypočítáme pomocí známého matematického vztahu, se znalostí velikosti jednotkového vektoru a s využitím geometrických vztahů (viz obr.) :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{S} = 1 \cdot dS \cdot \cos\alpha = dS'$$

Tento skalární součin tedy vyjadřuje průmět plošky dS do roviny kolmé k průvodiči v daném místě - a velikost tohoto průmětu je označena dS' .

Dosadíme zpět do integrálu a uvažme, že diferenciální plošku na výše uvedené rovině kolmé k průvodiči si lze představit také na kulové ploše poloměru velikosti průvodiče r .

Pak za integrálem vznikl výraz, který je přímo podle matematické definice **prostorovým úhlem**, pod kterým je vidět z místa náboje ploška dS (a rovněž ploška dS').

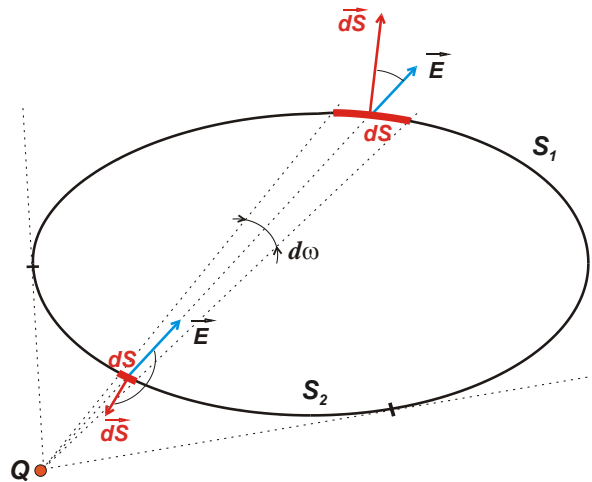
Integrál, tj. součet těchto úhlů přes uzavřenou plochu S , má potom zřejmě hodnotu celého prostorového úhlu, tedy 4π steradiánů :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_S \frac{dS'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_S d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Velikost toku elektrické intenzity tak překvapivě vůbec nezávisí na poloze náboje Q (uvnitř plochy S).

2) Dále uvažme situaci, kdy bodový náboj leží vně plochy S :

Postup výpočtu musí být principiálně stejný - tzn. za integrálem opět vznikne prostorový úhel odpovídající diferenciálnímu elementu plochy. Z obrázku však vidíme, že tento prostorový úhel je vždy společný dvěma ploškám na „protilehlých“ částech S_1 a S_2 dané uzavřené plochy (viz obr.) :



Integrál je ovšem (limitní) součet - nezáleží tedy na pořadí „sčítanců“, a mohu proto sčítat – integrovat – po těchto dvojicích protilehlých plošek.

Uvažme ale ještě, že vektor „dolní“ plošky je protilehlý vektoru intenzity (viz obr., svírají úhel větší než pravý) - a proto je jejich skalární součin a tedy i hodnota prostorového úhlu záporná - a stejně veliká jako pro „horní“ plošku :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_S d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_{S_1} d\omega + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_{S_2} -d\omega$$

Po vytknutí – a tím vlastně aplikujeme uvedené sčítání po dvojicích - tak dostáváme jednoznačný výsledek:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_{S_1, S_2} (d\omega - d\omega) = 0$$

Velikost toku elektrické intenzity uzavřenou plochou tedy ani v tomto případě náboje vně plochy nezávisí na jeho poloze a je vždy nulová.

Je tak zřejmé, že nenulový integrál (rovný velikosti daného náboje) dávají pouze náboje uvnitř plochy.

Získané výsledky pak zobecníme pro libovolný počet nábojů, umístěných vně i uvnitř dané uzavřené plochy následovně:

Napišeme výše získané rovnice pro každý jednotlivý náboj vně i uvnitř plochy.

Po sečtení všech těchto rovnic – integrálů na levých stranách - i vnitřních nábojů na stranách pravých – můžeme levou stranu zapsat jako integrál součtu intenzit od všech nábojů, tj. výsledné intenzity elektrického pole – zatímco na pravé straně bude jen celkový náboj uvnitř plochy:

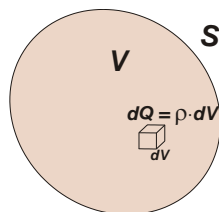
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gaussův zákon elektrostatiky (integrální tvar)

Slovní vyjádření: Tok vektoru výsledné intenzity elektrostatického pole libovolnou uzavřenou plochou je určen celkovým nábojem uvnitř této plochy.

(ale výsledná intenzita el. pole je určena všemi náboji – uvnitř i vně uzavřené plochy)

Ve skutečnosti jsou ovšem elektrické náboje rozloženy na různých tělesech uvnitř (i vně) uzavřené plochy – předpokládejme nejobecnější případ náboje spojitě rozloženého s hustotou ρ v celém vnitřním objemu V této plochy :



Pak vyjádříme celkový náboj Q uvnitř plochy S :

$$Q = \iiint_V dQ = \iiint_V \rho dV$$

a dosadíme ho do pravé strany Gaussova zákona, na levou stranu pak aplikujeme Gaussovu větu matematiky:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_V \rho dV$$

Porovnáním obou stran dostaneme rovnost integrovaných funkcí :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Gaussův zákon elektrostatiky (diferenciální tvar)

Tato diferenciální rovnice je opět velmi cenná tím, že podobně jako diferenciální vztah pro konzervativnost popisuje další zásadní vlastnost elektrostatického pole přímo v daném bodě prostoru.

(Přitom má stejný fyzikální význam jako integrální tvar - divergence na levé straně znamená výtok elektrické intenzity z jednotkového objemu (tj. přes plochu obklopující 1 objem)a na pravé straně je objemová hustota náboje, tj. náboj obsažený (uvnitř) právě v tomto jednotkovém objemu.)

Jestliže tedy například nějaké místo elektrického pole je **bez nábojů**, tj. $\rho = 0$, potom je nulová divergence, tedy :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

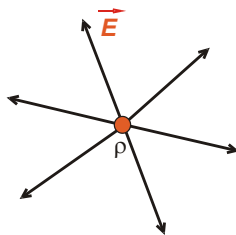
pole je nezřídlové

Ale v případě, že v daném místě **jsou elektrické náboje**, tj. $\rho \neq 0$, potom ovšem bude :

$$\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$$

pole je zřídlové

Můžeme proto tvrdit, že **elektrické náboje jsou zřídla (zdroje) elektrického pole**.

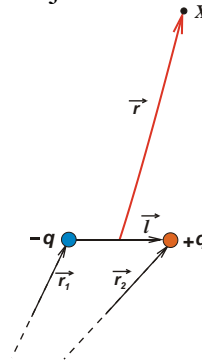


(Vektory vycházející ze zdroje ovšem v elektrostatickém poli nepopisují skutečný mechanický pohyb hmoty, jako by tomu bylo v hydrodynamice v poli proudící tekutiny – zde jde jen o „geometrii“ silového pole v daném místě prostoru.)

Elektrostatické pole je tedy obecně nezřídlové, kromě míst elektrických nábojů.

Elektrické pole ve hmotném prostředí

Ve hmotném (látkovém) prostředí hrají roli - kromě vnějších zdrojů elektrického pole (vnější náboje) - také elektrické náboje uvnitř hmoty, kde např. v dielektriku vytvářejí tzv. **elektrické dipóly**.



Tyto **velmi malé** objekty, které obecně v nějaké míře vytváří každá částice hmoty (molekuly, atomy), charakterizuje veličina :

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

(elektrický) dipólový moment

Každý elektrický dipól vytváří svoje vlastní elektrické pole, jehož potenciál ve vzdálenosti r od dipólu má jednoduchý tvar (za podmínky $r \gg l$) :

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$

Velký počet těchto elektrických dipólů (řádu Avogadrova čísla - jako počty částic ve hmotě) pak vytváří vnitřní dipólové pole, které se pak skládá s polem od vnějších nábojů, takže výsledné elektrické pole v látce je změněné (je menší, konkrétně ϵ_r - krát)

Pro započítání vlastností různých látek bylo nutno zavést **novou vektorovou** fyzikální veličinu - elektrickou indukci \vec{D} , která je obecnější než elektrická intenzita E a jejich vzájemný vztah znáte již ze střední školy :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

vztah elektrické indukce a intenzity

kde ϵ_r je relativní permitivita látky, charakterizující „dipólové“ vlastnosti látky a ϵ je (celková) permitivita látky:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$$

permitivita látky

Gaussův zákon v dielektriku má potom obecnější tvar:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Gaussův zákon v dielektriku (pro elektrickou intenzitu)

a po vynásobení ϵ , a na levé straně s využitím definice elektrické indukce, dostaneme jeho nejjednodušší tvar:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

Gaussův zákon ve hmotném prostředí (integrální tvar)

Stejným způsobem, jako jsme již dělali dříve, s využitím Gaussovy věty matematiky, dostaneme opět důležitou diferenciální rovnici platnou v každém místě prostoru – a v obecnějším tvaru než s elektrickou intenzitou:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Gaussův zákon ve hmotném prostředí (dif.tvar)

Pozn: Coulombův zákon v dielektriku má potom tvar:
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{r}_o$$

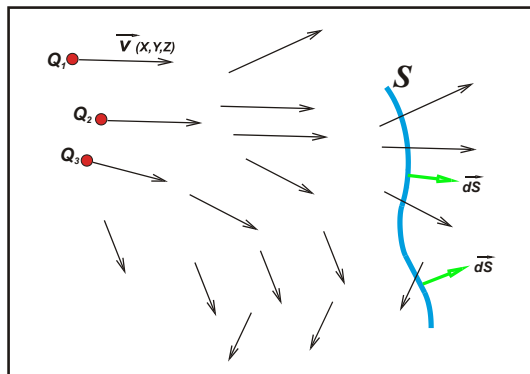
Elektrický proud

V tomto odstavci opouštíme elektrostatické pole, protože veličinu elektrický proud zavádíme v situaci, kdy elektrické náboje v prostoru nejsou nehybné, ale pohybují se.

Víme, že jednou ze základních vlastností nábojů je jejich spojení s hmotnými částicemi – při pohybu nábojů jde tedy současně o pohyb hmoty v prostoru, který lze stejně jako v hydrodynamice popsat tak, že stanovíme rychlosti nábojů v každém místě sledovaného prostoru (pole rychlosti):

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$$

Pro exaktní definici elektrického proudu musíme v prostoru, ve kterém se pohybují náboje, zvolit spojitou (myšlenou) plochu S (viz následující obrázek, na kterém je plocha nakreslena „z profilu“ a vypadá tedy jako křivka).



Vždy je potřeba zvolit „kladný směr“ přechodu nábojů přes plochu (zde např. „zleva napravo“), kdy všechny takto přecházející náboje se budou sčítat, a opačně přecházející náboje se budou odečítat.

Obecně se slovní popis směru přechodu plochy ne vždy hodí (zakřivená plocha), pak je lépe zvolit normálový vektor plochy $d\vec{S}$ - pak v každém místě plochy můžeme jednoznačně konstatovat, zda náboje procházejí plochu ve směru tohoto vektoru, nebo opačně.

Tedy: necht' dQ je celkový náboj, který za dobu dt projde přes plochu S ve zvoleném směru (normálového vektoru), potom definujeme:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

elektrický proud (procházející plochou S)

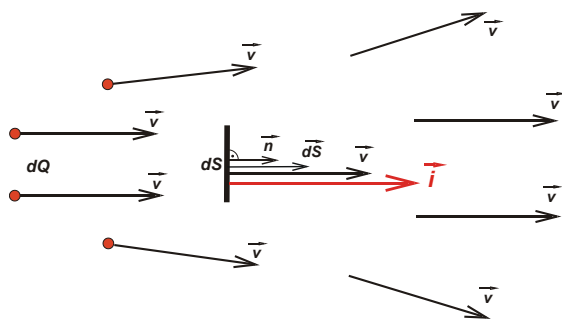
Slovní vyjádření : je to celkový elektrický náboj, prošlý zvolenou plochou S za jednotku času (ve stanoveném směru).

Jednotkou elektrického proudu je : 1A [Amper] = 1C/1s

I při použití normálového vektoru je elektrický proud stále skalární, makroskopická (integrální) veličina – popisuje celkový, výsledný přesun elektrického náboje přes celou „velkou“ plochu S.

Pro přesný popis pohybu nábojů v daném místě pak zavádíme vektorovou veličinu **plošná hustota elektrického proudu (proudová hustota) \vec{i}** , a to následovně:

V daném místě zvolíme malou plošku dS kolmou na rychlost nábojů \vec{v} a označíme dI proud procházející touto ploškou ve směru \vec{v} (stejném jako $d\vec{S}$, i jako normálový vektor \vec{n} (viz obr.).



Pak definujeme **vektor proudové hustoty \vec{i}** pomocí jeho velikosti a jednotkového vektoru :

- směr a orientaci mu přiřadíme stejnou jako má rychlost nábojů \vec{v} , tj. jako jednotkový normálový vektor \vec{n} plošky dS
- a jeho velikost stanovíme vztahem :

$$i = \frac{dI}{dS}$$

proudová hustota (velikost)

Slovně : je to elektrický proud, procházející jednotkovou plochou kolmou k rychlosti pohybu nábojů, nebo-li elektrický náboj prošlý za 1 času 1 kolmou plochou.

Pozn.: Proudová hustota je velmi důležitá pro stanovení proudového zatížení vodičů v elektrotechnice, její jednotkou je 1 A/m²

Vektorový zápis proudové hustoty pak bude :

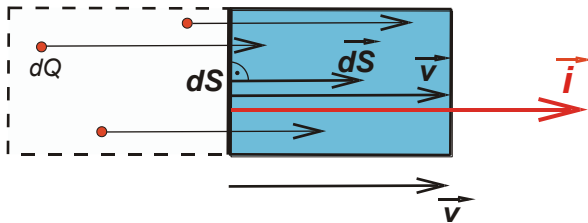
$$\vec{i} = i \cdot \vec{n}$$

proudová hustota (vektor)

Proudová hustota tedy detailně popisuje chování nábojů v daném místě a čase – určuje množství náboje a směr jeho pohybu.

Dále vyjádříme proudovou hustotu pomocí rychlosti nábojů za předpokladu spojitého rozložení náboje v prostoru s hustotou ρ .

Náboje se rychlostí \vec{v} přes diferenciální plošku dS pohybují kolmo k ní po přímočarých drahách, a přitom přecházejí z jedné strany plošky na stranu druhou (viz obr.).



Protože s pohybem nábojů je nedílně spojený pohyb hmoty, můžeme použít dřívějších znalostí z hydrodynamiky (viz kapitola Gaussův zákon), že objemový tok ploškou dS - jako objem hmoty proteklý přes tuto plošku za 1 času (na obrázku zvýrazněný) - lze vyjádřit skalárním součinem vektoru plošky a rychlosti částic (nábojů), který má v případě rovnoběžných vektorů jednoduchý tvar :

$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = v dS$$

Vynásobením hustotou náboje ρ získáme celkový náboj prošlý ploškou dS za 1 času - nebo-li podle definice proud přes tuto plošku :

$$\rho \cdot v dS = dI$$

A dosazením do definice můžeme vypočítat velikost proudové hustoty :

$$i = \frac{dI}{dS} = \frac{\rho v dS}{dS} = \rho v$$

Protože je to vztah mezi velikostmi rovnoběžných vektorů, můžeme změnit rovnici na vektorovou (stačí vynásobit obě strany jednotkovým vektorem \vec{n}) :

$$\vec{i} = \rho \cdot \vec{v}$$

vztah proudové hustoty a rychlosti nábojů

Hustota nábojů ve sledovaném prostoru a jejich pole rychlosti nám tedy umožňují stanovit proudovou hustotu a tím získat informaci o lokálních pohybech nábojů v libovolném místě prostoru.

Pak ovšem také musí být principiálně možné určit celkový přenos náboje přes libovolně zvolenou velkou plochu S - tedy **elektrický proud** procházející touto plochou.

Začneme výpočtem objemového toku přes její libovolnou elementární plošku dS - protože má nyní tato ploška obecnou polohu, vektory plošky a rychlosti nejsou rovnoběžné - musíme ponechat obecný tvar skalárního součinu :

$$\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

a opět vynásobením hustotou náboje ρ získáme celkový náboj v tomto objemu, tj. náboj prošlý ploškou dS za 1 času - tedy proud přes tuto plošku :

$$dI = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

Potom celkový proud přes celou plochu S je součtem (integrálem) těchto výrazů:

$$I = \iint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

elektrický proud jako tok proudové hustoty

Tento velmi obecný vztah, spojující integrální veličinu elektrický proud s lokální (diferenciální) proudovou hustotou, bude dále efektivně využit např. při úpravách rovnic magnetického pole.

Zákony magnetického pole

Přesněji řečeno - budeme zkoumat magnetostatické pole, tj. časově neproměnné (stacionární) magnetické pole, které je způsobeno stacionárními (stejnoseměrnými) proudy nebo zmagnetovanými látkami.

Magnetické pole je opět polem silovým - tj. bude popsáno silou působící na zkušební elektrický bodový náboj q .

„Magnetická“ síla je bohužel výrazně komplikovanější povahy než Coulombova elektrostatická síla :

- na elektrický náboj v klidu nepůsobí v magnetickém poli žádná síla
- pokud se (bodový) náboj pohybuje nenulovou rychlostí, působí na něj síla úměrná velikosti náboje, velikosti rychlosti a závisící na směru této rychlosti podle vztahu :

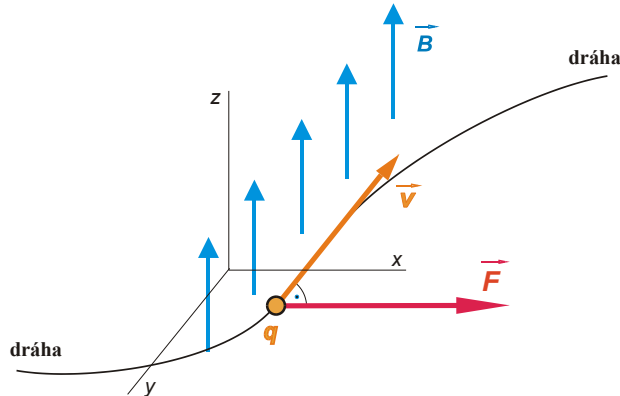
$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Lorentzův vztah (Lorentzova síla)

Vektorová veličina \vec{B} - **magnetické indukce** - vyjadřuje působení magnetického pole na elektrický náboj, je základním parametrem tohoto pole, který existuje v každém místě prostoru.

Pozn.: Tato rovnice vlastně magnetickou indukci definuje, rovněž její jednotku:

magnetické pole má magnetickou indukci 1 Tesla = 1T, jestliže působí silou 1 N na náboj velikosti 1 C, který se pohybuje rychlostí 1 m/s kolmo na směr indukce.



Z Lorentzova vztahu dobře vidíme, že na náboj v klidu ($v = 0$) magnetického pole nepůsobí a působící síla je rovněž nulová ve speciálním případě rychlosti náboje rovnoběžné s vektorem magnetické indukce. Dále - Lorentzova síla je vždy **kolmá** k rychlosti pohybu náboje, tj. k tečně dráhy - má tedy charakter **dostředivé** síly - tedy na rozdíl od síly elektrostatické nemůže způsobit tečné zrychlení.

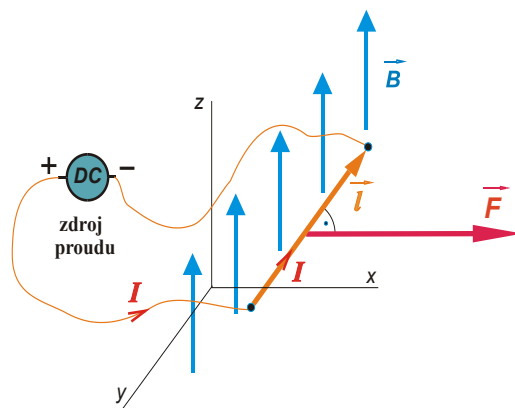
Uvažme ještě, že když na pohybující se náboj v magnetickém poli působí síla, musí působit i na náboje, které tvoří elektrický proud v nějakém vodiči a ve svém důsledku se pak tato síla přenáší na vodič a snaží se ho v magnetickém poli vychýlit.

Jestliže sečteme (integrujeme) síly, které působí na elementy vodiče protékaného proudem, můžeme lehce vypočítat sílu, která působí na libovolný vodič, protékaný proudem I:

$$\vec{F} = I \cdot \int_l d\vec{l} \times \vec{B}$$

Speciálně pro přímý vodič délky l v homogenním magnetickém pak dostaneme známý středoškolský vzorec, ke kterému ani není potřeba používat „pravidlo levé ruky“:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$



Základní veličina magnetického pole - vektor magnetické indukce – byla intenzivně hledána od prvních let 19. století – až roku 1820 Jean Baptiste Biot a Félix Savart experimentálně určili, že je úměrná elektrickému proudu a že závisí na tvaru vodiče, kterým proud protéká, a na vzdálenosti od něj, což matematicky zformuloval Pierre Simon de Laplace do následujícího zákona :

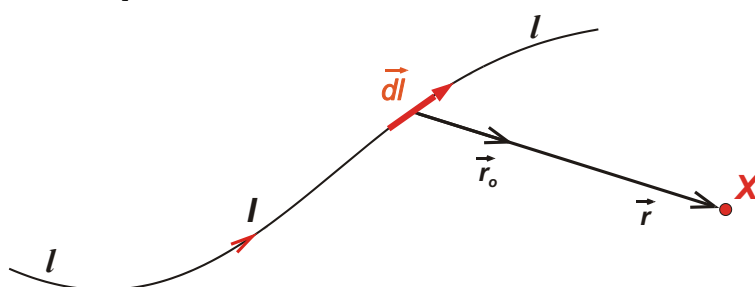
Nechť l je vodič protékáný proudem (stacionárním) I , pak jeho element $d\vec{l}$ přispívá k magnetické indukci v bodě X hodnotou :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \cdot d\vec{l} \times \vec{r}_o$$

Biottův – Savartův zákon

kde \vec{r} je polohový vektor bodu X vzhledem k $d\vec{l}$ a μ_0 je fyzikální konstanta - *permeabilita vakua*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [WbA}^{-1}\text{m}^{-1}\text{]}$$



A magnetickou indukci od celého vodiče dostaneme jako integrál těchto výrazů po celé délce vodiče:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_o}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Tento vztah lze aplikovat na výpočet magnetického pole od libovolné proudové konfigurace – vodiče různého tvaru, závit, cívka

Lorenzův vztah a Biottův–Savartův zákon kompletně popisují působení každého magnetického pole na náboje - jsou jeho základními experimentálními zákony

Ze vztahu pro Lorenzovu sílu je na první pohled zřejmé, že magnetické pole **není konzervativní**, neboť vztah pro sílu obsahuje skrytý parametr dráhy – její tečnu (ve vektoru rychlosti) – zřejmě tedy není možné definovat skalární potenciál a vyjádřit s jeho pomocí veličiny pole.

Kdyby ovšem nastala „pouze“ ta situace, že vykonaná práce mezi dvěma místy závisí na tvaru dráhy – jako v indukovaném elektrickém poli – ale magnetické pole nám přináší daleko horší „podraz“ :

- působící síla je vždy kolmá k tečně dráhy proto je její práce vždy nulová – magnetické pole tedy nikdy **nekoná práci**.

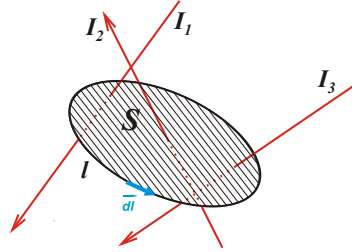
Nulové veličiny jsou samozřejmě nepotřebné, a tak se může zdát, že pro výstavbu obecné teorie magnetismu by mohly chybět některé důležité veličiny a vztahy (potenciál, nevírovost pole, rotace).

Skalární potenciál však bylo možno nahradit potenciálem vektorovým a cirkulace vektoru v magnetickém poli byla „zachráněna“ již roku 1822, kdy André Maria Ampère zformuloval velmi důležitý „zákon celkového proudu“ :

Nechť l je spojitá uzavřená křivka ohraničující libovolnou spojitou plochu S , pak platí :

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \quad \text{\underline{Ampérův zákon}} \text{ (integrální tvar)}$$

kde I je celkový proud, protékající plochou S (v takovém smyslu, že ze strany plochy, do které proud vtéká, je vidět obíhání křivky l v kladném smyslu.



Je zřejmé, že celkový proud I mohou tvořit například jednotlivé elektrické proudy v různých vodičích, které protínají plochu S (viz obr.):

$$I = I_1 + I_3 - I_2$$

A nebo může jít o pohyb nábojů spojitě rozložených v prostoru pak můžeme výhodně použít vztah odvozený v kapitole „Elektrický proud“ :

$$I = \iint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

který dosadíme do Ampérová zákona :

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \iint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

Levou stranu upravíme pomocí Stokesovy věty matematiky :

$$\iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot \iint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

A z rovnosti stejných integrálů plyne rovnost funkcí :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{i} \quad \text{\underline{Ampérův zákon}} \text{ (diferenciální tvar)}$$

Další zásadní teoretický vztah byl nalezen, když podobně jako v elektrostatickém poli byl zkoumán **tok vektoru** magnetické indukce libovolnou spojitou plochou S tj. veličina :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{\underline{magnetický indukční tok}}$$

Tato veličina je principiálně důležitá pro činnost mnoha elektromagnetických strojů a v teorii bylo zjištěno, že tento tok má pro libovolnou **uzavřenou** plochu významnou velikost, a - stejně jako u Gaussova zákona - nezávislou na volbě této plochy :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{\underline{bezejmenný zákon}} \text{ (integrální tvar)}$$

Pomocí Gaussovy věty, aplikované na levou stranu rovnice, pak dostaneme i nulovost divergence :

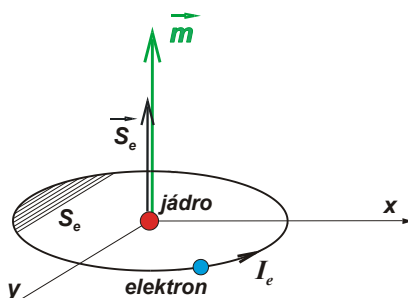
$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{\underline{bezejmenný zákon}} \text{ (diferenciální tvar)}$$

Magnetické pole je tedy **nezřídlové** - tj. neexistují v něm místa, do kterých by vstupovaly magnetické indukční křivky, jako je tomu v elektrostatickém poli v místě elektrických nábojů – můžeme také tvrdit, že v magnetickém poli **neexistují „magnetické náboje“**.

Magnetické pole ve hmotném prostředí

Magnetické pole ve hmotném (látkovém) prostředí vytváří - kromě vnějšího magnetického pole (od vnějších zdrojů – elektrických proudů a magnetů) - také vnitřní zdroje - elektrické proudy uvnitř hmoty, tzv. **mikroskopické proudy**.

Těchto skutečně miniaturních proudů je v každém hmotném prostředí velké množství (řádu Avogadrova čísla) - příkladem je elektron v atomu „obíhající“ jeho jádro - tím vytváří malý elektrický proud I_e , tekoucí kolem plošky S_e (viz obr.).



Je to vlastně malý kruhový závit s proudem, který podle Biottova–Savartova zákona vytváří kolem sebe „vlastní“ magnetického pole.

Pro tento malý zdroj magnetického pole, který zřejmě obsahuje každá částice hmoty, se ujal název **magnetický dipól** a pro jeho charakterizaci se definuje veličina **magnetický dipólový moment** :

$$\vec{m} = I_e \cdot \vec{S}_e$$

dipólový moment atomu

Pozn.: Je zajímavé, že magnetický dipól je „něco úplně jiného“ než dipól elektrický, ale matematické vztahy pro tyto dipóly jsou formálně stejné, nebo velmi podobné.

Vnitřní magnetické pole od mikroskopických proudů (od magnetických dipólů) se pak skládá s vnějším mg. polem (od vnějších zdrojů) , takže výsledné magnetické pole v látce je jiné než vnější (je menší i větší)

Pro započítání vlastností různých látek bylo opět nutno zavést **novou vektorovou** veličinu – magnetickou **intenzitu H** , která je obecnější než elektrická intenzita – a jejíž vztah k elektrické intenzitě znáte již ze střední školy

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$$

vztah magnetické indukce a intenzity

kde μ_r je relativní permeabilita látky, charakterizující „dipólové“ vlastnosti látky a μ je (celková) permeabilita látky:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

permeabilita prostředí

Amperův zákon ve hmotném prostředí má potom obecnější tvar:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu \cdot I = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I$$

Amperův zákon ve hmotném prostředí

a po vydělení rovnice veličinou μ a na levé straně s využitím definice magnetické intenzity, dostaneme jeho nejjednodušší tvar:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$

Amperův zákon ve hmotném prostředí

Jestliže dále proud na pravé straně vyjádříme podle odstavce „Elektrický proud“ pomocí proudové hustoty a levou stranu upravíme pomocí Stokesovy věty, pak dostaneme :

$$\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

a z rovnosti stejných integrálů opět plyne rovnost funkcí :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{i}$$

Amperův zákon ve hmotném prostředí (dif.tvar)

Pozn.: Na rozdíl od elektrického pole v látce, které bylo vždy ϵ_r - krát menší než vně látky, je magnetické pole μ_r - krát větší a rozlišujeme tři skupiny látek:

- 1) Látky **diamagnetické**, které magnetické pole poněkud zeslabují ($\mu_r < 1$, $\mu_r \approx 1$)
- 2) Látky **paramagnetické**, které magnetické pole poněkud zesilují ($\mu_r > 1$, $\mu_r \approx 1$)
V obou těchto případech je tedy magnetické pole v látce jen málo odlišné od vnějšího pole, velká změna nastane až u třetí skupiny látek :
- 3) Látky **feromagnetické**, které magnetické pole výrazně zesilují ($\mu_r \gg 1$)

Jev elektromagnetické indukce

V minulých kapitolách jsme mohli uvědomit, že pojmy klid a pohyb, které byly velmi významné u mechanických dějů, při zkoumání elektrických a magnetických jevů nabyly přímo zásadní důležitosti .

Na tom, zda jsou náboje v klidu, nebo se pohybují, přece závisí, zda „vznikne“ pole elektrické, nebo pole magnetické a zcela různé rovnice těchto polí nás pak přivádějí k domněnkám i o jejich absolutní, samostatné a naprosto odlišné podstatě.

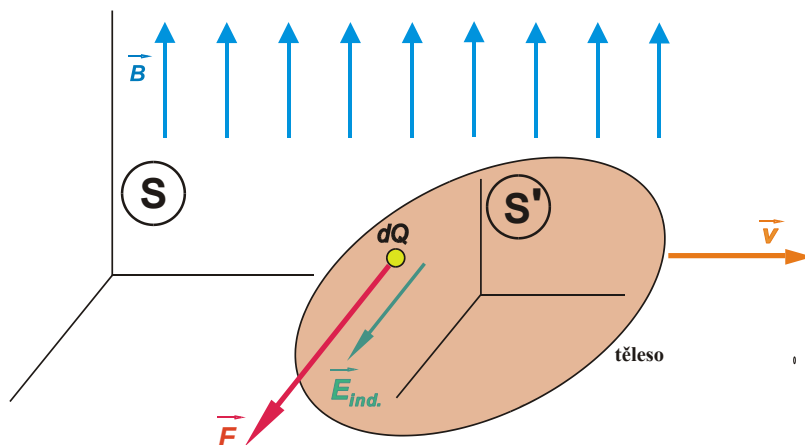
Na druhé straně už dávno víme, že klid a pohyb jsou pojmy relativní , závislé na naší individuální volbě souřadné soustavy což ovšem velmi „relativizuje“ předpokládanou odlišnost a samostatnost obou polí a přináší tušení (jejich) souvislosti.

Jev elektromagnetické indukce je pak prvním fyzikálním jevem, založeným na relativnosti klidu a pohybu, který matematicky potvrdil tuto souvislost elektrického pole s polem magnetickým.

Pro úvodní charakterizaci tohoto jevu využijeme dvě různé inerciální souřadné soustavy S a S' , jaké jsme již dříve použili v mechanice (viz obr.):

Nechť v „klidové“ (inerciální) souřadné soustavě S existuje (stacionární) magnetické pole \vec{B} , druhá inerciální soustava S' je pak pevně spojena s nějakým tělesem a spolu s ním se pohybuje konstantní rychlostí \vec{v} vzhledem ke klidové soustavě S

Dále si představme elektrický náboj q pevně spojený s tělesem – je tedy v klidu vůči tomuto tělesu, i vůči soustavě S' a spolu s ním se pohybuje rychlostí \vec{v} vzhledem k soustavě S :



Potom pozorovatel v soustavě S objektivně konstatuje, že na pohybující se náboj q působí v magnetickém poli Lorentzova síla :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Ovšem pozorovatel v soustavě tělesa S' stejně objektivně vidí, že tato síla působí na klidový náboj q , a musí proto konstatovat, že existuje (vzniklo při pohybu tělesa) nějaké **elektrostatické** pole a pomocí velikosti náboje a síly může dokonce vypočítat jeho intenzitu (síla působící na náboj je stejná v S i S' , neboť v inerciálních soustavách nepůsobí žádné dodatečné - setrvačné - síly) :

$$\vec{E}_{ind.} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

intenzita el. pole

Toto pole je skutečně jednoznačným důsledkem pohybu tělesa (soustavy S'), neboť při nulové rychlosti neexistuje (síla je nulová) – proto bylo nazváno **indukované elektrické pole**.

Pomocí elektrické intenzity je pak možno definovat a měřit další veličiny (ale opatrně, pole není konzervativní – viz dále), například napětí – v učebnicích je popsáno mnoho experimentů s indukovaným napětím na vodičích různého tvaru a při různých pohybových stavech.

Všechny nalezené vlastnosti tohoto jevu pak nejobecněji popisuje **Faradayův zákon** elektromagnetické indukce (1831):

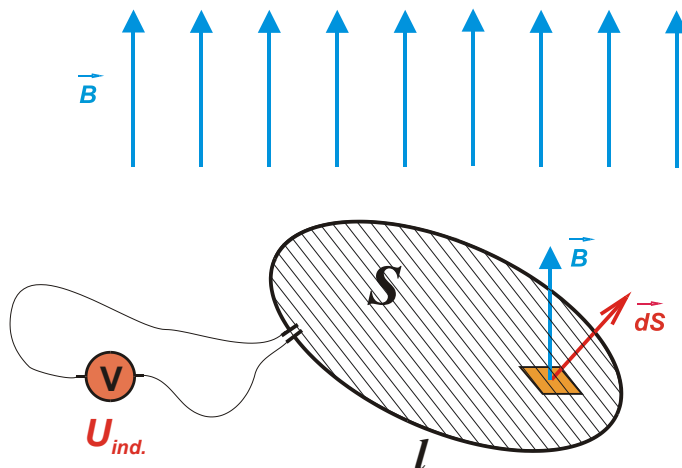
Nechť l je vodič, ve tvaru (skoro) uzavřené křivky (ohraničující spojitou plochu S), uložené v magnetickém poli. Pak indukované napětí „na celém“ vodiči l (mezi dvěma nekonečně blízkými body, viz obr.) lze vyjádřit jako :

$$U_{ind.} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Faradayův zákon elmg indukce (integrální tvar)

kde Φ je tok vektoru magnetické indukce (libovolnou) plochou S ohraničenou křivkou vodiče l :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Pozn.: V důsledku indukovaného napětí může ve vodiči protékat elektrický proud (když zajistíme vodivou dráhu) – který má podle Lenzova pravidla takový směr, že působí proti změně, která ho vyvolala.

Na principu tohoto jevu je založena činnost mnoha elektrických strojů a přístrojů, bez nichž by nikdy neexistoval průmyslový rozvoj – elektrické motory, generátory, transformátory, ... Používá se v nich několik způsobů realizace časové změny magnetického indukčního toku :

- 1) Pohyb vodiče v magnetickém poli
- 2) Pohyb zdrojů pole (magnetů, cívek)
- 3) Časově proměnné magnetické pole, vyvolané časově proměnnými (nestacionárními) proudy

Nyní na pravé straně rovnice dosadíme definiční vztah magnetického indukčního toku a na levé straně rovnice vyjádříme indukované napětí na vodiči l - jako křivkový integrál z intenzity elektrického pole a dostaneme:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{ind.} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Derivace a integrace (na pravé straně rovnice) se týkají různých proměnných, proto můžeme zaměnit jejich pořadí – derivace magnetické indukce bude ovšem parciální, neboť je to jistě funkce času i souřadnic

Současně aplikujme na levou stranu matematickou Stokesovu větu, která převede křivkový integrál na plošný a celkem tedy bude :

$$\iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Z rovnosti stejných integrálů plyne rovnost funkcí :

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{Faradayův zákon (dif. tvar)}$$

Dostáváme tak důležitou rovnici, která jednoznačně tvrdí, že při každé změně magnetického pole vzniká pole elektrické, jinak řečeno - že časově proměnné (nestacionární) magnetické pole je vždy doprovázeno polem elektrickým.

Byl to zásadní matematický důkaz spojitosti obou polí a když se později pomocí Maxwellova objevu posuvného proudu ukázalo, že analogicky také při každé změně elektrického pole vznikne pole magnetické – tj., že tedy vztah obou polí je rovnocenný a žádné pole není důležitější než to druhé - pak bylo možno zavést pojem elektromagnetického pole (viz dále).

Elektromagnetické pole

Z Faradayova zákona :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

je ihned vidět, že při každé změně magnetického pole (způsobené například proměnlivými, nestacionárními proudy) vzniká pole elektrické – pole magnetické a pole elektrické jsou tak spolu jednoznačně svázané .

Dále si uvědomíme, že elektrické (elektrostatické) pole je silové působení pouze klidových nábojů a u nábojů v pohybu se definuje proud a vzniká pole magnetické (magnetostatické).

Z mechaniky ale víme, že klid a pohyb jsou relativní pojmy (závisí na použité soustavě souřadnic) – a stejně relativní musí být pojmy „elektrické pole“ a „magnetické pole“ - jsou to zřejmě pouze dva projevy jediné obecnější reality, která byla nazvána elektromagnetického pole .

Protože toto předpokládané obecné pole se v různých konkrétních podmínkách projevuje jako již známé a dobře popsané pole elektrické nebo magnetické, bylo možné očekávat, že :

- k jeho popisu by se možná nemusely zavádět nové fyzikální veličiny a mohly by postačit veličiny již známé, definované v těchto dvou polích, tj. elektrická a magnetická intenzita a indukce (\vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B}).
- základní rovnice charakterizující elektromagnetické pole by mohly být nalezeny zobecněním již známých vztahů z elektrického a magnetického pole.

To se také podařilo Maxwellovi ve druhé polovině 19. století - sledujme nyní jeho základní postup :

Napišme všechny známé rovnice z elektrického a magnetického pole:

- 1) $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ (konzervativnost el. pole) (nevírovost)
- 2) $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ (Gaussův zákon)
- 3) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (Bezejm. zákon) (neex. mg. nábojů)
- 4) $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i}$ (Ampérův zákon)
- 5) $\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faradayův zákon)

Rovnici (1) lze vynechat – je zřejmě speciálním tvarem rovnice (5) při neexistenci magnetického pole. Maxwell pak prozkoumal zbylé čtyři rovnice a dospěl k závěru, že pouze rovnice (4) vyžaduje zobecnění, neboť obsahuje „relativní“ veličinu elektrický proud (která existuje pouze u pohybujících se nábojů, na rozdíl od hustoty nábojů v rovnici (2), kterou lze definovat vždy, ať jsou náboje v klidu, či v pohybu) .

Při studiu rovnice (4) objevil Maxwell veličinu, která byla určena časovými změnami elektrického pole a měla stejný fyzikální rozměr jako elektrický proud:

$$\vec{i}_p = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Maxwellův posuvný proud

Maxwell učinil osudový zásadní předpoklad , že posuvný proud se účastní generování magnetického pole naprosto stejně jako „obyčejný“ proud volných nábojů – pak na pravé straně Ampérova zákona, tj. na místě zdrojů magnetického pole, musí vystupovat oba tyto proudy

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{\underline{obecný Amperův zákon}}$$

Takto vznikly Maxwellovy rovnice , které považujeme za „základní rovnice“ elektromagnetického pole :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Maxwellovy rovnice (1864, uvedený tvar až 1887 Hertz)

Jejich význam je nesporný :

- 1) velké množství poznatků z elektřiny a magnetismu je zobecněno do čtyř formálně jednoduchých přehledných rovnic
- 2) nejdůležitější vlastností rovnic je jejich značná symetrie (zejména pro $\rho = 0$, $i = 0$, tj. pro dielektrikum bez volných nábojů)
- 3) tato symetrie dokazuje naprostou rovnocennost (svázanost, spojitost) elektrického a magnetického pole - žádné z obou polí není prvotní, ani nějakým způsobem „privilegované“ a časová změna kteréhokoliv z nich vyvolá pole druhé
- 4) Maxwellovy rovnice v sobě „obsahují“ – tj. je možno z nich odvodit další důležité vztahy – zákon zachování energie, zákon zachování náboje, vztahy mezi elektrickými a magnetickými vektory, ...
- 5) byly z nich předpovězeny nové, dosud neznámé jevy a vlastnosti elektromagnetického pole (vlnové vlastnosti)
- 6) byl to vynikající, největší úspěch klasické fyziky, který připravil pole pro Einsteinovu teorii relativity (a ta na něm nic nezměnila)
- 7) a také její poslední úspěch - „labutí píseň“ klasické fyziky, - začíná rozvoj moderní fyziky (její dva hlavní zdroje tvoří teorie relativity a kvantová mechanika)
- 8) **a patří mezi „Top-ten“ fyzikálních a matematických rovnic**

<https://futurism.com/images/ten-equations-changed-world>

<https://owlcation.com/stem/Top-Ten-Beautiful-Physics-Equations>

Ještě námět pro zvědavé studenty:

Jak vidíte v odkazech, tak teoretickým fyzikům se nelíbil slovní zápis operátorů rotace a divergence, proto vymysleli trojúhelník postavený na špičce dokážete identifikovat, jaký má význam?