

Odraž na kulové ploše

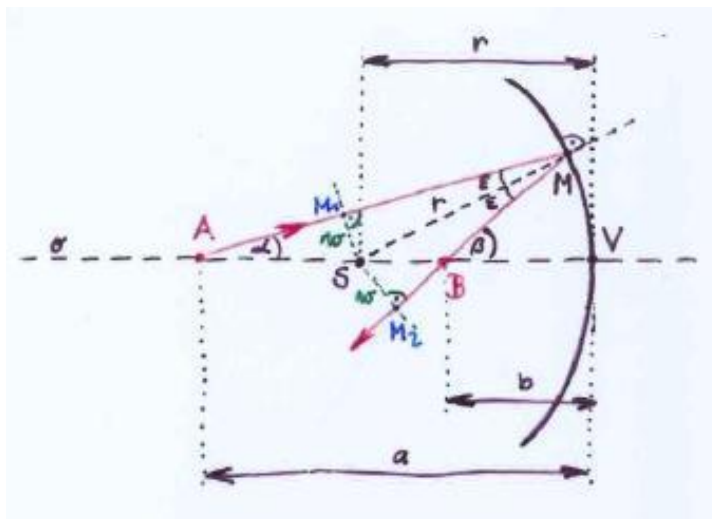
Duté zrcadlo

o osa zrcadla

V vrchol zrcadla

S střed zrcadla (kul. plochy)

r poloměr zrcadla (kul. plochy)



Paprsek vychází z bodu A na ose zrcadla a po odraze na zrcadle dopadá do nějakého bodu B na ose.

Z trojúhelníků vyznačených na obrázku plyne:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ASM_1: \sin \alpha = \frac{w}{a-r} \\ \Delta ASM_1: \sin \beta = \frac{w}{r-b} \end{array} \right\} \text{ rovnice vydělíme a dostaneme: } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{r-b}{a-r}$$

Základní podmínkou optického zobrazování je, že světelné paprsky se příliš nevzdalují z blízkého okolí optické osy – tzv. **paraxiální prostor** – a že přitom s optickou osou svírají malé úhly.

Potom platí, že oblouk MV se blíží úsečce kolmé k optické ose, a že funkce sinus a tangens se přibližně rovnají svému argumentu:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \approx \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{MV}{a} \\ \beta \approx \sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \frac{MV}{b} \end{array} \right\} \text{ dosadíme: } \frac{r-b}{a-r} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{MV}{a}}{\frac{MV}{b}} = \frac{b}{a}$$

Vzniklou rovnici vynásobíme součinem jmenovatelů $a(a-r)$:

$$ar - ab = ba - br$$

a seskupíme:

$$ar + br = 2ba$$

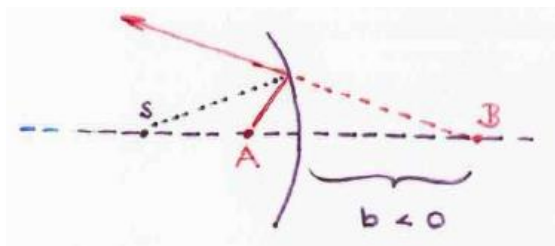
Po vydělení součinem $a b r$ dostaneme jednoduchý vztah:

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}} \quad \text{\underline{vrcholová rovnice dutého zrcadla}}$$

Vrcholová rovnice nezávisí na úhlech α a β !

Tedy **všechny paprsky** vycházející z bodu A – tzv. **předmět** - pod **malými úhly** vzhledem k ose zrcadla (tzv. **paraxiální paprsky**) dopadají do jediného bodu B - tzv. **obraz**.

Speciálně se může stát (pro $a < r$), že odražený paprsek neprotne optickou osu ve skutečnosti, ale jen když ho zpětně prodloužíme vzniká tzv. **zdánlivý (virtuální) obraz** (viz obr.)

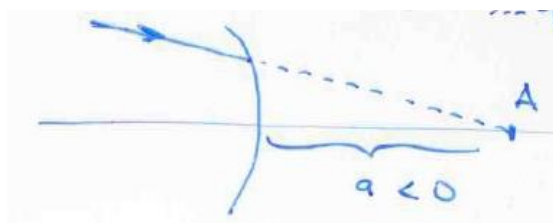


Pak bychom museli druhému členu na levé straně přidat záporné znaménko (proč?) a rovnice by tak dostala jiný tvar:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{r}$$

Je ale jistě vhodnější rovnici neměnit a raději přijmout „**znaménkovou dohodu**“, že virtuálnímu obrazu – za zrcadlem – přiřadíme zápornou hodnotu ($b < 0$).

Analogicky virtuální předmět – opět za zrcadlem – bude mít zápornou hodnotu ($a < 0$) :

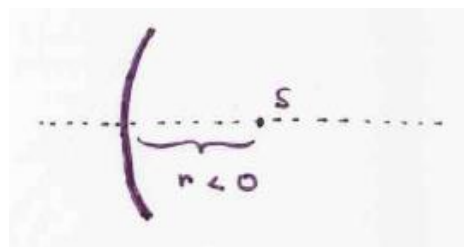


Vypuklé zrcadlo

Po analogickém výpočtu dostaneme rovnici (zkuste za *D. cv.*), která se od rovnice dutého zrcadla liší jen znaménkem pravé strany:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{2}{r}$$

Pak opět postačí znaménková dohoda, že poloměr vypuklého zrcadla – má střed za zrcadlem – označíme záporným číslem ($r < 0$):



Pak tedy pro obě zrcadla bude platiti stejný vztah:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}$$

vrcholová rovnice kulového v zrcadla

Lom na kulové ploše

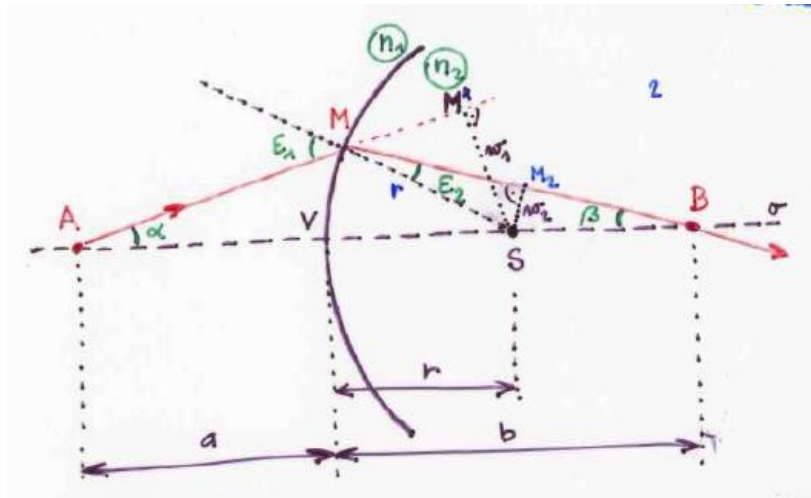
Pro vzorový výpočet je na obrázku znázorněno **vypuklé** kulové rozhraní dvou různých optických prostředí s indexy lomu n_1 a n_2 :

o osa kulové plochy

V vrchol kulové plochy

S střed kulové plochy

r poloměr kulové plochy



Paprsek opět vychází z bodu A na optické ose a po lomu dopadá do nějakého bodu B této osy. Podle obrázku platí:

$$\left. \begin{aligned} \triangle ASM_1: \sin \alpha &= \frac{w_1}{a+r} \\ \triangle MM_1S: \sin \varepsilon_1 &= \frac{w_1}{r} \end{aligned} \right\} \text{ rovnice vydělíme: } \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon_1} = \frac{r}{a+r}$$

$$\left. \begin{aligned} \triangle BSM_2: \sin \beta &= \frac{w_2}{b-r} \\ \triangle ASM_2: \sin \varepsilon_2 &= \frac{w_2}{r} \end{aligned} \right\} \text{ rovnice vydělíme: } \frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon_2} = \frac{r}{b-r}$$

Vzniklé rovnice opět vydělíme a využijeme zákon lomu: $\boxed{\frac{\sin \alpha / \sin \beta = n_2 / n_1}$ a funkce sinus s kosinus pro malé úhly nahradíme jejich argumenty:

$$\frac{r-b}{a-r} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon_1} \cdot \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\frac{VM}{a}}{\frac{VM}{b}} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{b}{a}$$

Rovnici, která vznikne z levé strany a z konečné pravé strany vynásobíme součinem jmenovatelů:

$$n_2 ab - n_2 ar = n_1 ba + n_1 br \quad \text{a seskupíme: } n_1 br + n_2 ar = n_2 ab - n_1 ba = ab(n_2 - n_1)$$

Po vydělení součinem abr vznikne opět jednoduchý vztah:

$$\boxed{\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$

Vrcholová rovnice kulové lámavé plochy

Vrcholová rovnice opět nezávisí na úhlech α a β !

Tedy všechny paprsky vycházející z bodu A (**předmět**) pod malými úhly k optické ose (**paraxiální paprsky**) se lámou do jediného bodu B (**obraz**).

Stejně jako u odrazné kulové plochy je nutno dosadit **záporné hodnoty** pro **zdánlivý obraz** nebo **předmět**, které jsou na opačných stranách než reálné a pro poloměr **duté** lámavé plochy.

Znaménkovou dohodu lze pak zobecnit pro kulové odrazné i lámavé plochy následovně:

- vzdálenost předmětu od vrcholu kulové plochy odrazné nebo lámavé počítáme kladně ve směru proti postupu světla dopadajícího na plochu
- vzdálenost obrazu od vrcholu kulové plochy odrazné nebo lámavé počítáme kladně ve směru postupu světla na ploše odraženého nebo lomeného
- poloměr kulové plochy označíme znaménkem, jaké by měl střed kulové plochy jako obraz.

Zavedení pojmu ohnisko:

Víme, že odrazná kulová plocha přiřadí každému bodu jako předmětu nějaký určitý bod jako obraz (skutečný nebo zdánlivý).

Definujeme: bod na optické ose, jehož obraz je v nekonečnu, se nazývá **předmětové ohnisko F**.

Jeho polohu $a = f$ (**předmětová ohnisková vzdálenost**) dostaneme z vrcholové rovnice pro $b \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b \rightarrow \infty} = \frac{2}{r} \quad \text{tedy bude: } \boxed{a = f = \frac{r}{2}}$$

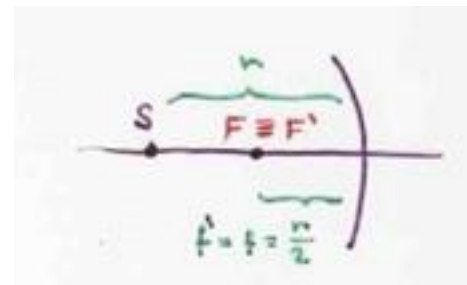
Analogicky: bod na optické ose, jehož předmět je v nekonečnu, se nazývá **obrazové ohnisko F'**.

Jeho polohu $b = f'$ (**obrazová ohnisková vzdálenost**) dostaneme pro $a \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{a \rightarrow \infty} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad \text{tedy stejný výsledek: } \boxed{b = f' = \frac{r}{2}}$$

U zrcadla jsou tak obě ohniska totožná: $F \equiv F'$
a jsou stejná obrazové i předmětové ohniskové vzdálenosti:

$$f = f' = \frac{r}{2}$$



A vrcholovou rovnici lze psát:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Vrcholová rovnice kulového v zrcadla

Po **lámavou plochu** získáme ohniska analogickým postupem:

předmětové ohnisko: $\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b \rightarrow \infty} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = f = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}}$

obrazové ohnisko: $\frac{n_1}{a \rightarrow \infty} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}}$

U lámavé plochy už tedy ohniska nejsou totožná: $F \neq F'$ a obrazové i předmětové ohniskové vzdálenosti jsou různé: $f \neq f'$

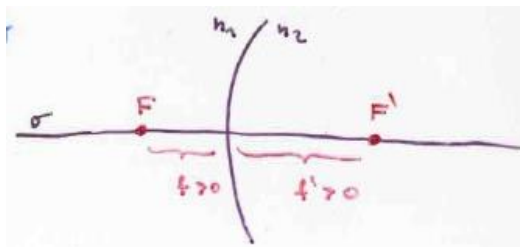
Vrcholovou rovnici je pak možno psát se dvěma variantami pravé strany:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_1}{f} \quad (= \frac{n_2}{f'})$$

vrcholová rovnice kulové lámavé plochy

Ze vztahů pro ohniskové vzdálenosti lámavé plochy je zřejmé (proč?), že f i f' musí mít stejné znaménko, např.: $f > 0, f' > 0$

Z toho plyne, že ohniska F a F' jsou vždy v opačných částech optické osy (viz obr.):



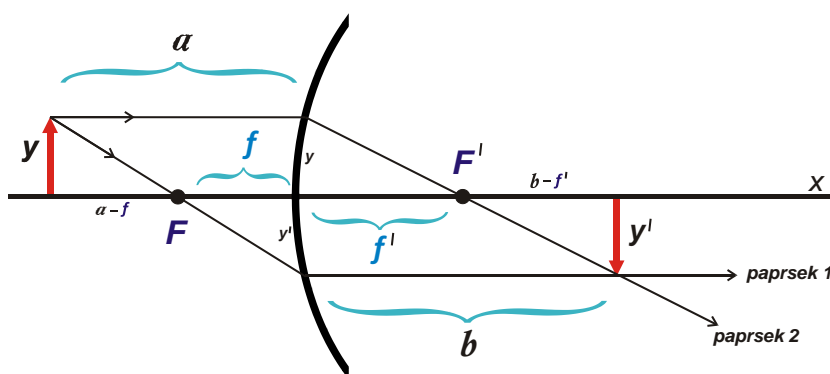
Zvětšení obrazu

Jestliže už známe polohu předmětového a obrazového ohniska, můžeme jejich vlastnosti využít pro konstrukci obrazů:

- jestliže je obraz předmětového ohniska v nekonečnu, pak každý paprsek, který z předmětového ohniska F vychází, je rovnoběžný s optickou osou - tedy „protíná ji v nekonečnu“ (paprsek 1)
- stejně tak všechny paprsky rovnoběžné s osou, které „přicházejí z nekonečna“, se protínají v obrazovém ohnisku F' (paprsek 2)

Protože pro konstrukci obrazového bodu postačí průsečík právě dvou přímk, které mají popsané vlastnosti, můžeme lehce vytvořit obraz libovolného mimoosového předmětového bodu.

A jestliže tento předmětový bod bude koncovým bodem úsečky postavené kolmo na optickou osu, pak jsme vlastně schopni předmětovou úsečku délky y zobrazit na úsečku délky y' (viz následující obrázek pro kulovou lámavou plochu)



Délky těchto úseček y a y' jsou to vlastně svislé souřadnice koncových bodů úseček na myšlené svislé ose, s počátkem na optické ose a s kladným směrem nahoru:

- tedy je $y > 0$ a když její obraz vznikne “pod optickou osou” (je převrácený), pak $y' < 0$.

Poměr těchto úseček definuje veličinu:

$$Z = \frac{y'}{y}$$

Příčné zvětšení obrazu

Dosazuje se včetně znaménka.... pak záporné zvětšení znamená převrácený obraz

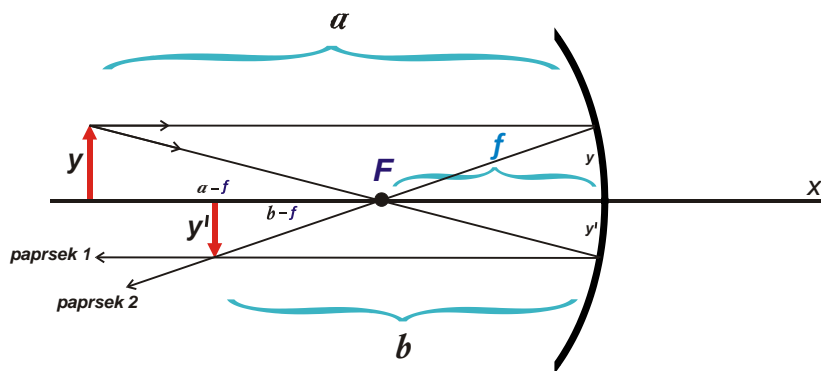
Z podobných trojúhelníků na obrázku plyne pro poměry stran (k záporné y' musíme přidat minus):

$$\frac{y}{a-f} = \frac{-y'}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f}$$

$$\frac{y}{f'} = \frac{-y'}{b-f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{b-f'}{f'}$$

Pro příčné zvětšení kulovou lámavou plochu tak platí: $Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{b-f'}{f'}$

Provedeme dále zobrazení předmětové úsečky délky y na obrazovou úsečku y' pro **kulovou odraznou** plochu (viz obr.), která má obě ohniska totožná a stejné obě ohniskové vzdálenosti:



Z podobných trojúhelníků na obrázku plyne pro poměry stran (k záporné y' musíme přidat minus):

$$\frac{y}{a-f} = \frac{-y'}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f}$$

$$\frac{y}{f} = \frac{-y'}{b-f} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{b-f}{f} \quad (= -\frac{b-f'}{f'} \text{ protože } f = f')$$

I pro příčné zvětšení kulovou odraznou plochu tedy formálně platí: $Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{b-f'}{f'}$

Pro příčné zvětšení kulových **odrazných i lámavých ploch** tedy platí stejné vztahy:

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{b-f'}{f'}$$

Příčné zvětšení obrazu