

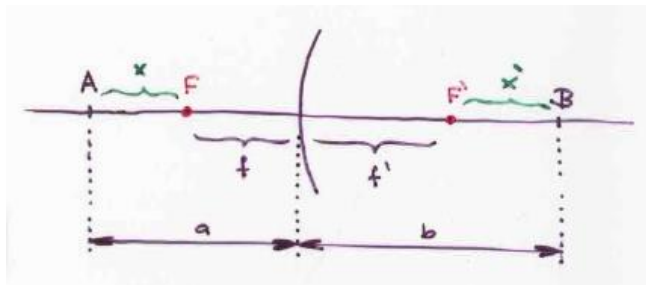
## Optické zobrazení

### Ohniskové souřadnice:

Ohniskové souřadnice  $x$  a  $x'$  předmětu a obrazu definujeme jako jejich vzdálenosti od příslušných ohnisek (viz obr.), se stejnými znaménkovými konvencemi jako pro vzdálenosti  $a$  a  $b$ .

Podle obrázku platí převodní vztahy:

$$\begin{array}{l} a = x + f \\ b = x' + f' \end{array}$$



### Dosaďme je do vrcholové rovnice lámavé plochy:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_1}{f} \quad \text{a dostaneme:}$$

$$\frac{n_1}{x+f} + \frac{n_2}{x'+f'} = \frac{n_1}{f} \quad \text{rovnici vynásobíme součinem jmenovatelů:}$$

$$n_1 \cdot (x' + f') \cdot f + n_2 \cdot (x + f) \cdot f' = n_1 \cdot (x + f) \cdot (x' + f') \quad \text{roznásobíme dvojčleny:}$$

$$n_1 x' f + n_1 f f' + n_2 x f + n_2 f f' = n_1 x x' + n_1 x f' + n_1 f x' + n_1 f f' \quad \text{a odečteme stejné výrazy:}$$

$$n_2 x f + n_2 f f' = n_1 x x' + n_1 x f'$$

Pro druhý člen pravé strany dále použijeme vztah mezi ohniskovými vzdálenostmi (viz minulá kapitola):

$$\frac{n_1}{f} = \frac{n_2}{f'} \quad \text{nebo-li: } n_1 f' = n_2 f \quad \text{a po vykrácení dostaneme:}$$

$$n_2 f f' = n_1 x x' \quad \text{a po další aplikaci uvedeného vztahu na levou stranu vznikne:}$$

$$n_1 f f' = n_1 x x' \quad \text{tedy: } \boxed{xx' = ff'}$$

### Dosaďme je také do rovnice kulového zrcadla (uvažte, že platí stejné převodní vztahy):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \text{pak tedy dostaneme:}$$

$$\frac{1}{x+f} + \frac{1}{x'+f'} = \frac{1}{f}, \quad \text{vynásobením součinem jmenovatelů odstraníme zlomky:}$$

$$f \cdot (x' + f') + f \cdot (x + f) = (x + f) \cdot (x' + f') \quad \text{a roznásobíme: } fx' + ff' + fx + ff = xx' + xf' + fx' + ff'$$

$$\text{za podmínky: } f = f' \quad \text{vznikne po vykrácení: } \boxed{xx' = ff'} \quad (= ff')$$

### **V obou případech tedy dostáváme stejný výsledek:**

$$\boxed{x \cdot x' = f \cdot f'}$$

### Ohnisková rovnice zrcadla a lámavé plochy

### **Ohnisková rovnice tak s sebou přináší velkou výhodu univerzální platnosti pro všechny druhy zrcadel a i lámavých ploch.**

Lze ji také formálně napsat ve formě vzájemného vztahu mezi souřadnicemi, přitom na levou stranu lze převést čárkované, nebo nečárkované  $x$ ):

$$\boxed{x' = \frac{f \cdot f'}{x}} \quad \text{nebo:} \quad \boxed{x = \frac{f \cdot f'}{x'}}$$

Převodní vztahy se mohou dosadit i do vztahů pro příčné zvětšení, které jsou stejné pro zrcadla i lámavé plochy (viz minulá kapitola), tedy:

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{f}{(x+f)-f} = -\frac{f}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{f \cdot y}{x}$$

nebo pro druhou variantu:

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{b-f'}{f'} = -\frac{(x'+f')-f'}{f'} = -\frac{x'}{f'} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{f' \cdot y'}{x'}$$

Pro odrazné i lámavé plochy tak dostáváme stejné, velmi jednoduché výrazy

$$\boxed{Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}} \quad \text{Příčné zvětšení zrcadla a lámavé plochy}$$

Které opět můžeme zapsat jako vztah mezi souřadnicemi:

$$\boxed{y' = -\frac{f \cdot y}{x}} \quad \text{nebo:} \quad \boxed{y = -\frac{f' \cdot y'}{x'}}$$

A nakonec můžeme zavést třetí souřadnou osu  $z$  - kolmou na optickou osu  $x$ , i na osu  $y$  - a protože mezi osami  $z$  a  $y$  nemůže být principiální rozdíl, musí pro souřadnice předmětu a obrazu na ose  $z$  platit analogická rovnice jako pro osu  $y$ :

$$\boxed{z' = -\frac{f \cdot z}{x}} \quad \text{nebo:} \quad \boxed{z = -\frac{f' \cdot z'}{x'}}$$

**Dostali jsme tak dvě trojice rovnic pro kartézské souřadnice předmětu a obrazu, které platí pro všechny druhy lámavých i odrazných kulových ploch.**

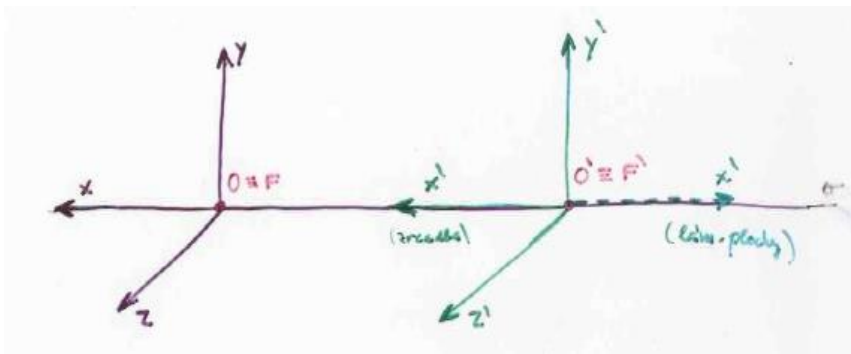
$$\begin{aligned} x' &= \frac{f \cdot f'}{x} \\ y' &= -\frac{f \cdot y}{x} \\ z' &= -\frac{f \cdot z}{x} \end{aligned}$$

Newtonovy obrazové rovnice

$$\begin{aligned} x &= \frac{f' \cdot f}{x'} \\ y &= -\frac{f' \cdot y'}{x'} \\ z &= -\frac{f' \cdot z'}{x'} \end{aligned}$$

v inverzním tvaru

**Zavedli jsme tak vlastně klasický tříosý kartézský systém souřadnic s počátkem v předmětovém ohnisku  $F$  pro zobrazení souřadnic předmětu.....a analogický „čárkovaný“ systém s počátkem v obrazovém ohnisku  $F'$  pro zobrazení souřadnic obrazu (viz obr.).**



Newtonovy rovnice pak vyjadřují **transformační vztahy** mezi kartézskými souřadnicemi  $(x, y, z)$  bodu v tzv. **předmětovém prostoru** a souřadnicemi  $(x', y', z')$  jeho obrazu v tzv. **obrazovém prostoru** :

Je tak definováno tzv. **optické zobrazení** – jako **vzájemně jednoznačné přiřazení** předmětu a obrazu.....  
 .....tj. každému bodu předmětu  $(x, y, z)$  – je jednoznačně přiřazen bod  $(x', y', z')$  - jeho obraz.

V tomto zobrazení jsou - kromě bodů - vzájemně jednoznačně přiřazeny i prostorové útvary:

- 1) Uvažme nejprve, co je obrazem libovolné roviny v předmětovém prostoru, **kolmé** na optickou osu. Její rovnice obsahuje dvě konstanty:

$$\boxed{ax + d = 0} \quad (\text{nebo-li: } x = \text{konst.})$$

Dosaďme za  $x$  z první Newtonovy rovnice:  $a \cdot \frac{ff'}{x'} + d = 0$  , rovnici vynásobíme  $x'$  :

$a \cdot ff' + d \cdot x' = 0$  .....a dostaneme formálně stejnou rovnici, jen s jinými konstantami:

$$\boxed{a'x' + d' = 0}$$

Tedy obrazem naší roviny je **opět rovina kolmá** na optickou osu, v obrazovém prostoru.

- 2) Stejně jednoduchým dosazením do rovnice obecné roviny (se čtyřmi konstantami):

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

bychom dostali jako její obraz opět libovolná obecná rovina.

- 3) A bez výpočtu lze usoudit, že obrazem libovolné přímky je opět přímka, neboť jakoukoliv přímku si lze představit jako průsečnici dvou rovin, které se opět zobrazí do jiných dvou rovin.

Takové **zobrazení** předmětového prostoru na obrazový prostor - kdy obrazem roviny je opět rovina a obrazem přímky je opět přímka - se nazývá **prostorová kolineace**.

Pozn.: Základním teoretickým předpokladem paprskové optiky je ovšem stále jen omezená oblast paraxiálního prostoru.

V následujících odstavcích probereme další důležité pojmy používané při optickém zobrazování:

## Definice ohniskových rovin

Rovina  $\varphi$  jdoucí předmětných ohniskem  $F$  a kolmá na optickou osu se nazývá .....  
..... **ohnisková rovina předmětová**

Všechny její body mají  $x$ -ovou souřadnici  $x = 0$ , takže z Newtonových rovnic plyne:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{f \cdot f'}{x} \rightarrow \infty \\ y' &= -\frac{f \cdot y}{x} \rightarrow \infty \\ z' &= -\frac{f \cdot z}{x} \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \text{obraz roviny leží v nekonečnu (v obrazovém prostoru)}$$

Analogicky rovina  $\varphi'$  jdoucí obrazovým ohniskem  $F'$  a kolmá na optickou osu se nazývá .....  
..... **ohnisková rovina obrazová**

Jaký je její předmět?

Všechny její body mají  $x'$ -ovou souřadnici  $x' = 0$ , takže podle Newtonových rovnic v inverzním tvaru dostaneme:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{f' \cdot f}{x'} \rightarrow \infty \\ y &= -\frac{f' \cdot y'}{x'} \rightarrow \infty \\ z &= -\frac{f' \cdot z'}{x'} \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \text{obraz roviny leží v nekonečnu (v předmětovém prostoru)}$$

## Definice hlavních rovin a hlavních bodů

Dále si představme v **předmětovém prostoru** (v místě  $x$ ) - v rovině kolmé na optickou osu - úsečku délku  $y$  - má  $y$ -souřadnice  $(0, y)$  .....

..... tato úsečka se v **obrazovém prostoru** zobrazí jako úsečka délky  $y'$  ..... která leží v nějaké obrazové rovině také kolmé k ose v místě  $x'$  - má souřadnice  $(0, y')$

Její délku určuje Newtonova rovnice:

$$y' = -\frac{f \cdot y}{x}$$

Jak vidíme, obrazy naší úsečky mají různé délky v závislosti na poloze  $x$  výchozí předmětové roviny. Z nekonečného počtu možností takových rovin pak vybereme roviny s následující **význačnou vlastností**:

Rovina v předmětovém prostoru kolmá k optické ose, jejíž úsečky délky  $y$  se zobrazí jako **stejně dlouhé** úsečky  $y'$  ( $= y$ ) se nazývá **kladná hlavní předmětová rovina  $H_+$**  .....  
..... jejím obrazem je **kladná hlavní obrazová rovina  $H_+'$** .

Polohy těchto rovin lehce dostaneme z podmínky  $y' = y$ , kterou dosadíme do Newtonovy rovnice:

$$y = y' = -\frac{f \cdot y}{x} \Rightarrow x = -f \quad \text{a po dosazení do inverzní obrazové rovnice:}$$

$$y' = y = -\frac{f' \cdot y'}{x'} \Rightarrow x' = -f'$$

Analogicky se definuje:

Rovina v předmětném prostoru kolmá k optické ose, jejíž úsečky délky  $y$  se zobrazí jako **stejně dlouhé**, ale **opačně orientované** ( $y' = -y$ ) se nazývá **záporná hlavní předmětová rovina  $H_-$** , jejím obrazem je **záporná hlavní obrazová rovina  $H'_-$** .

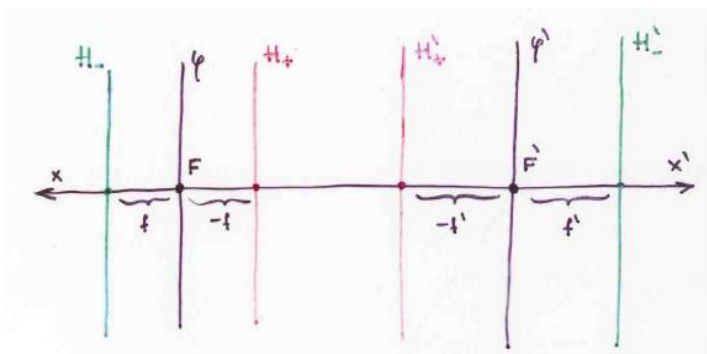
Polohy těchto rovin opět dostaneme z Newtonových rovnic z podmínky  $y' = -y$ :

$$-y = y' = -\frac{f \cdot y}{x} \Rightarrow x = f \quad \text{a po dosazení do inverzní obrazové rovnice:}$$

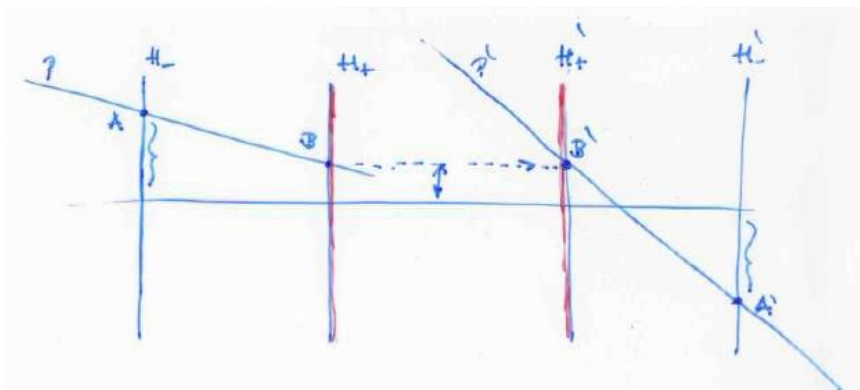
$$-y' = y = -\frac{f' \cdot y'}{x'} \Rightarrow x' = f'$$

Dále definujeme, že: hlavní roviny protínají optickou osu v **hlavních bodech**.

Graficky (pro lámavou plochu):

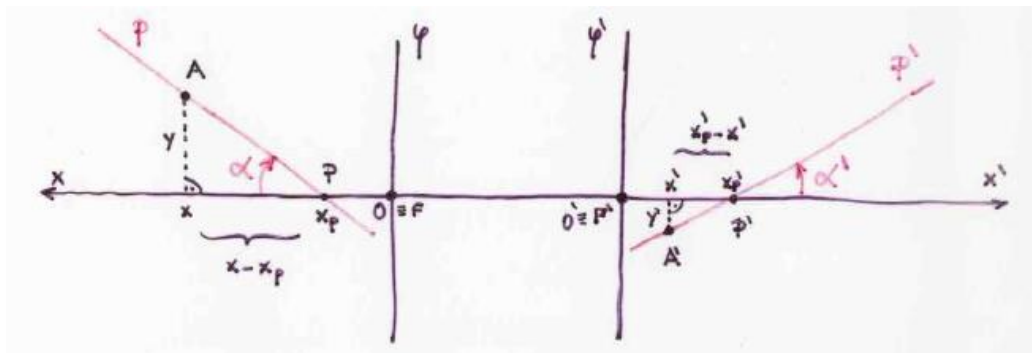


**Praktické využití hlavních rovin**: umožňují jednoduché grafické konstrukce obrazů libovolných paprsků:



## Definice úhlového zvětšení a uzlových bodů

Představme si libovolnou přímku  $p$  znázorňující světelný paprsek, který je skloněný k optické ose pod úhlem  $\alpha$  ..... její obraz přímka  $p'$  svírá s osou nějaký úhel  $\alpha'$  (viz obr.)



Pak definujeme veličinu:

$$Z_U = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{Úhlové zvětšení}$$

Pro výpočet úhlového zvětšení jsou na přímkách  $p$  a  $p'$  vyznačeny dva body:

- libovolný bod  $A = (x, y, 0)$  ..... a jeho obraz  $A' = (x', y', 0)$
- bod  $P = (x_p, 0, 0)$  ... průsečík přímky  $p$  s optickou osou ..... a jeho obraz  $P' = (x'_p, 0, 0)$

Jejich souřadnice určují podle obrázku délky stran vyznačených pravoúhlých trojúhelníků a můžeme je dosadit do definice úhlového zvětšení (započítáme zápornou hodnotu  $y'$ ):

$$\begin{aligned} Z_U &= \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{-y'}{x'_p - x'} \bigg/ \frac{y}{x - x_p} = \frac{x - x_p}{x'_p - x'} \cdot \frac{y'}{y} \quad , \text{ dosadíme z Newtonových rovnic a upravíme:} \\ &= \frac{x - x_p}{\frac{ff'}{x} - \frac{ff'}{x_p}} \cdot \left(-\frac{f}{x}\right) = \frac{x - x_p}{\frac{ff'}{x} \cdot \frac{x_p - x}{x \cdot x_p}} \cdot \left(-\frac{f}{x}\right) = \frac{(-1) \cdot x \cdot x_p}{ff'} \cdot \left(-\frac{f}{x}\right) = \frac{x_p}{f'} \end{aligned}$$

Výpočet úhlového zvětšení je tedy pomocí ohniskové souřadnice opět velmi jednoduchý:

$$Z_U = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{x_p}{f'}$$

Pro definici uzlových bodů optického zobrazení se pak využívají význačné hodnoty úhlového zvětšení:

Bod na optické ose, pro který je úhlové zvětšení rovno 1, se nazývá **kladný uzlový bod předmětový  $U_+$**  ..... jeho obrazem je **kladný uzlový bod obrazový  $U_+'$** .

Souřadnice těchto bodů určíme z definiční podmínky  $Z_U = 1$  a s využitím Newtonovy rovnice:

$$1 = Z_U = \frac{x_p}{f'} \Rightarrow x_p = f'$$

$$x'_p = \frac{f \cdot f'}{x_p} = \frac{f \cdot f'}{f'} \Rightarrow x'_p = f$$

Analogicky definujeme:

Bod na optické ose, pro který je úhlové zvětšení  $-1$ , nazýváme **záporný uzlový bod předmětný  $U_-$**  ..... jeho obrazem je **záporný uzlový bod obrazový  $U'_-$** .

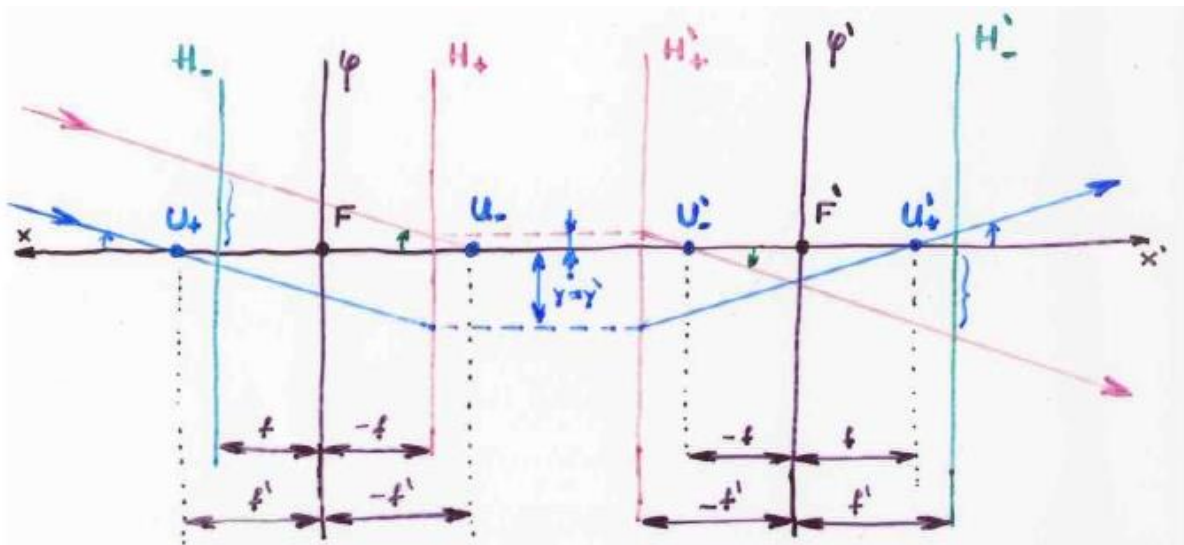
Souřadnice těchto bodů určíme obdobným způsobem:

$$-1 = Z_U = \frac{x_p}{f'} \Rightarrow x_p = -f'$$

$$x'_p = \frac{f \cdot f'}{x_p} = \frac{f \cdot f'}{-f'} \Rightarrow x'_p = -f$$

**Stejně jako hlavní roviny - také uzlové body umožňují pohodlné konstrukce obrazů libovolných paprsků**

(viz následující celkový obrázek význačných bodů a rovin při zobrazení lámavou kulovou plochou).



Z definice uzlových bodů také plyne (s ohledem na kladný směr odečítání úhlů – viz obr.) pro lámavou plochu:

- paprsek jdoucí záporným uzlovým bodem  $U_-$  zachovává svůj směr
- paprsek jdoucí kladným uzlovým bodem  $U_+$  změní svůj směr na opačný