Centrovaná optická soustava

V předchozích kapitolách jsme probrali princip, činnost a vlastnosti jednoduchých (teoretických) **optických prvků** – odrazných a lámavých kulových (i rovinných) ploch,

Nejjednodušší **optickou soustavou** je pak ze dvou kulových lámavých ploch vytvořená čočka (tlustá či tenká) – je to vlastně také nejjednodušší **konstrukčně samostatný** optický prvek, stejně jako zrcadlo (duté, vypuklé, rovinné).
Pojem centrovaná optická soustava pak znamená, že **splývají optické osy** dvou či více optických prvků *(optickou osou kulové plochy je každá přímka jsoucí středem kulové plochy - jejich společná optická osa pak musí procházet oběma středy křivosti).*

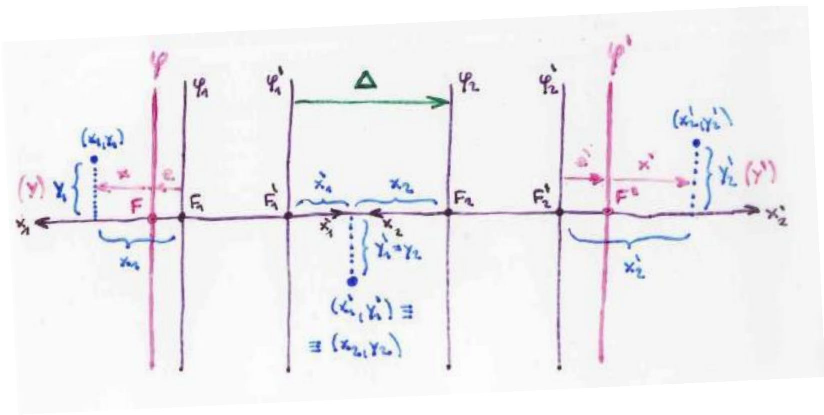
U optických soustav se naplno projeví **výhoda užití ohniskových rovnic** (Newtonových obrazových rovnic) **oproti rovnicím vrcholovým**. Oba druhy rovnic jsou sice stejně exaktní, ale použití vrcholových rovnic na soustavu optických prvků by zkomplikovala nutnost postupné aplikace a řešení vrcholových rovnic pro **každý vrchol** lámavé (či odrazné) kulové plochy soustavy ....

.........kdežto (téměř) každá optická soustava má vždy nějaké výsledné, celkové ohnisko předmětové i obrazové, a proto optické zobrazení touto soustavou může popsat **jediná ohnisková rovnice** (pro každou souřadnici).

Následovně budeme dokumentovat toto tvrzení na nejjednodušší centrované optické soustavě:

1. Dvě lámavé kulové plochy:

První kulová plocha ……… má ohniskové roviny φ_1 , φ_1' a ohniskové vzdálenosti f_1 , f_1'
Druhá kulová plocha ……… má ohniskové roviny φ_2 , φ_2' a ohniskové vzdálenosti f_2 , f_2'
Dále označíme: **Optický interval Δ** ……. vzdálenost φ_2 od φ_1' (kladná ve směru postupu světla)



Souřadnice předmětu pro první lámavou plochu jsou (x_1, y_1). Jeho obraz (x_1', y_1') vytvořený touto plochou je současně předmětem (x_2, y_2) pro 2. lámavou plochu, která vytvoří výsledný obraz (x_2', y_2').

Postupnou aplikací Newtonových rovnic pro první a druhou lámavou plochu dostaneme pro souřadnice výsledného obrazu vztahy:

$$\boxed{x_2' = \frac{f_2 \cdot f_2' \cdot x_1}{\Delta \cdot x_1 - f_1 \cdot f_1'} \qquad y_2' = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot y_1}{\Delta \cdot x_1 - f_1 \cdot f_1'}}$$

Z těchto vztahů nám pak požadavek na nekonečnost souřadnic výsledného obrazu, případně výchozího předmětu, umožní stanovit polohu **ohniskové roviny celé soustavy předmětové φ a obrazové φ' :**

$$e = x_1 = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta} \qquad e' = x_2' = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{f_2 \cdot f_2' \cdot x_1}{\Delta \cdot x_1 - f_1 \cdot f_1'} = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta - \frac{f_1 \cdot f'}{x_1}} = \frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}$$

Při znalosti ohnisek pak můžeme zavést **ohniskové souřadnice celé soustavy** (x,y) a (x',y') jako vzdálenosti výchozího předmětu a výsledného obrazu od ohnisek soustavy. Podle obrázku platí:

$$x = x_1 - e \qquad y = y_1 \qquad x' = x_2' - e \qquad y' = y_2'$$

Dosazením vztahů pro souřadnice obrazu zjistíme, že **předmětovou a obrazovou ohniskovou vzdálenost** celé soustavy můžeme definovat vztahy:

$$\boxed{f = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}} \qquad \boxed{f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}}$$

A pak pro ohniskové souřadnice obrazu bude platit:

$$\boxed{x' = \frac{f \cdot f'}{x} \qquad y' = -\frac{f \cdot y}{x}}$$

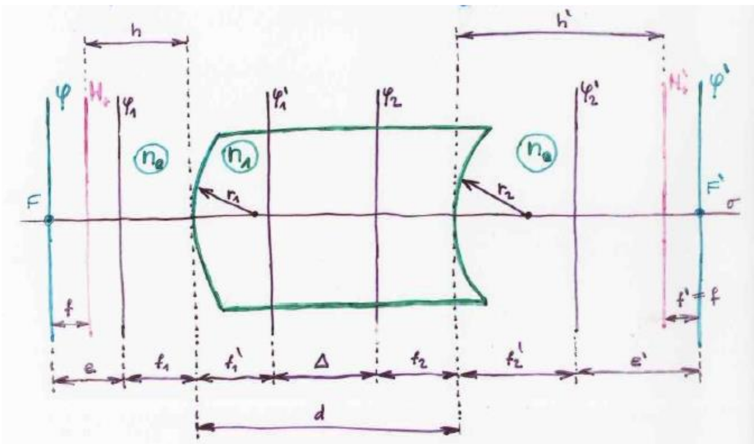
Obrazové ohniskové rovnice pro celou optickou soustavu mají tedy naprosto stejný tvar jako pro jednoduchou kulovou plochu! (analogicky i pro z-ové souřadnice)

> Pozn.: Tento postup nelze použít pro speciální případ $\Delta = 0$ *(teleskopická soustava)*
> (neboť by bylo $e, e', f, f' \to \infty$)
> Pak užíváme původní vztahy pro obrazové souřadnice druhé lámavé plochy (x_2', y_2')

Získané vztahy pro ***předmětovou a obrazovou ohniskovou vzdálenost*** lze dále dobře aplikovat na konkrétní soustavy lámavých ploch:

2. Tlustá čočka

Je speciální případ centrované optické soustavy, kdy optické prostředí s absolutním indexem lomu n_1 je ohraničeno dvěma lámavými kulovými plochami (s poloměry r_1 , r_2), jejichž vrcholy jsou ve vzdálenosti d (**tloušťka** čočky), přičemž okolní prostředí má absolutní index lomu n_0 (viz obr.).



Určení ohniskových vzdáleností:

Podle základních vztahů v odkazu „Kulová lámavá plocha“ vypočítáme nejprve ohniskové vzdálenosti jednotlivých kulových ploch a dosadíme do optického intervalu (z obrázku):

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = d - \frac{n \cdot r_1}{n - 1} - \frac{n \cdot r_2}{1 - n}$$

A pak už můžeme vypočítat ohniskové vzdálenosti celé optické soustavy podle získaných vztahů v první části:

$$\boxed{f = f' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)}}$$

U tlusté čočky jsou **obě ohniskové vzdálenosti stejné**

(jako důsledek stejného optického prostředí na obou stranách čočky)

Pozn: *To znamená, že* ***uzlové body tlusté čočky splývají s jejími hlavními body****.*

Pak můžeme stanovit vzdálenosti hlavních rovin od vrcholů kulových ploch čočky (viz obr.):

$$\boxed{h = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{f \cdot d}{r_2}} \qquad \boxed{h' = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{f \cdot d}{r_1}}$$

Pro charakterizaci čoček se často používá převrácená hodnota ohniskové vzdálenosti:

$$\boxed{D = \frac{1}{f}}$$ ***Optická mohutnost čočky*** [jednotka: **1 dioptrie = 1 D**]

Po dosazení za ohniskovou vzdálenost z předchozího vztahu a úpravách dostaneme pro optickou mohutnost tlusté čočky:

$$\boxed{D = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{r_1 \cdot r_2}}$$

Pro spojnou čočku (spojku) ……...…. $f > 0$ ………. $D > 0$

Pro rozptylnou čočku (rozptylku) ….. $f < 0$ ………. $D < 0$

Limitním případem tlusté čočky, kdy tloušťka čočky je velmi malá ($d \to 0$), je:

3. (Nekonečně) tenká čočka

Jestliže podmínku na její tloušťku aplikujeme na předchozí vztahy, dostaneme:

$$\boxed{h = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{f \cdot d}{r_2} \to 0} \qquad \boxed{h' = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{f \cdot d}{r_1} \to 0}$$

Tedy: **Hlavní body tenké čočky splývají se středem čočky.**

A zjednoduší se samozřejmě i vztah pro ohniskovou vzdálenost, případně optickou mohutnost:

$$D = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{r_1 \cdot r_2} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Jestliže označíme: $$\boxed{\rho = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$$ ***Vypuklost tenké čočky***

Pak vztah pro optickou mohutnost nabude jednoduchého tvaru:

$$\boxed{D = (n - 1)\cdot \rho}$$

Optická mohutnost tenké čočky

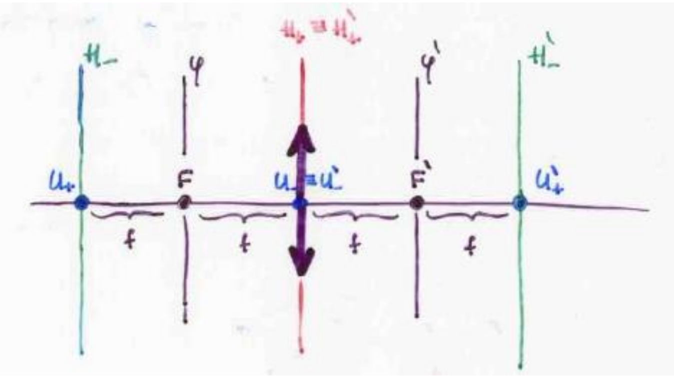
Uveďme význačné body a roviny tenké čočky pro obě možnosti – spojku a rozptylku:

a) Spojka $\;(\boldsymbol{f = f' > 0})$

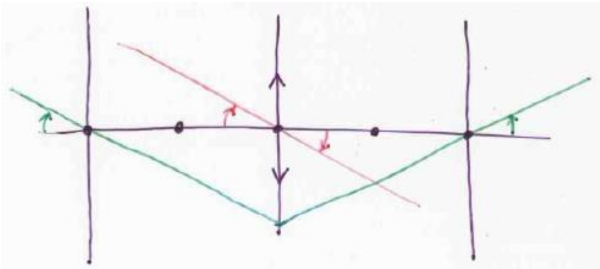
$$D = (n - 1)\cdot \rho > 0$$

$$\rho = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) > 0$$

(ve středu je spojka vždy silnější, než na okraji)



D.c.: Uvažte, jak se zobrazí význačné paprsky, jdoucí uzlovými body, ohniskem, případně rovnoběžné s osou …... ….. a obecný paprsek?

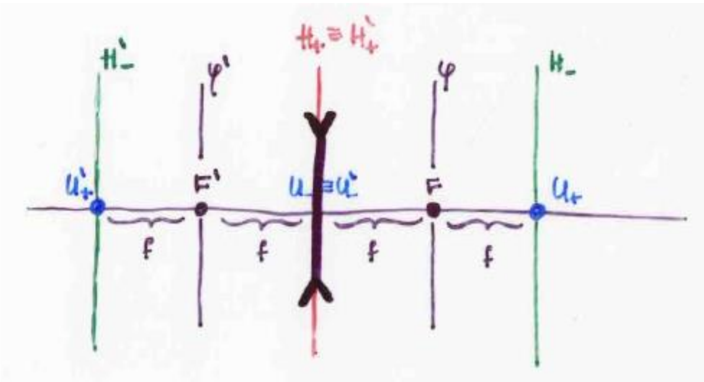


b) Rozptylka $\;(\boldsymbol{f = f' < 0})$ *(vynáší se stejné velikosti f, ale na opačnou stranu….)*

$$D = (n - 1)\cdot \rho < 0$$

$$\rho = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) < 0$$

(ve středu je rozptylka vždy tenčí, než na okraji)



D. cv.: Zakreslete opět chod význačných paprsků (dle potřeby je nutno prodloužit za čočku).

Pro optické zobrazení tenkou čočkou platí Newtonovy ohniskové rovnice (stejně jako pro každou centrovanou optickou soustavu),

samozřejmě spolu s **rovností** ohniskových vzdáleností $(f' = f)$:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{f \cdot f'}{x} \\ y' &= -\frac{f \cdot y}{x} \\ z' &= -\frac{f \cdot z}{x} \end{aligned}}$$

<u>***Newtonovy obrazové rovnice***</u>

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{f' \cdot f}{x'} \\ y &= -\frac{f' \cdot y'}{x'} \\ z &= -\frac{f' \cdot z'}{x'} \end{aligned}}$$

<u>***v inverzním tvaru***</u>

Platí tedy také vztahy pro příčné zvětšení, které byly použity při jejich odvozování:

$$\boxed{Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}}$$

zde bude: $\left(= -\frac{x'}{f} \right)$

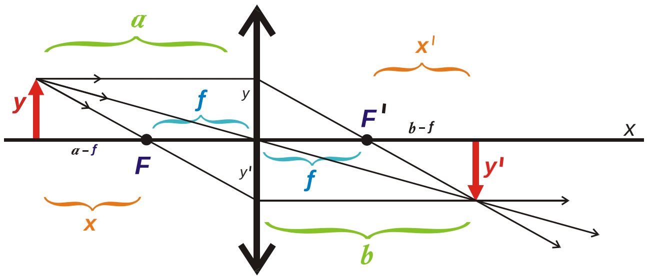
A také platit jejich původní vztahy pro zvětšení ve vrcholových souřadnicích, pro odrazné i lámavé kulové plochy:

$$\boxed{Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{b-f'}{f'}}$$

$$\left(= -\frac{b-f}{f} \right)$$

Jak je vidět z následujícího obrázku, z důvodu polohy záporných uzlových bodu ve středu tenké čočky, lze pro příčné zvětšení napsat ještě jeden vztah, který je nejjednodušší:

$$\boxed{Z = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}}$$



Jestliže porovnáme pravé vztahy pro příčné zvětšení, vznikne rovnost:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{f}{a-f} \qquad \left(nebo = -\frac{b-f}{f} \right)$$

Vynásobíme společným jmenovatelem:

$$a \cdot f = b \cdot (a-f) = b \cdot a - b \cdot f$$

A po vydělení ***abf*** a přeskupení dostaneme:

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$

<u>***Vrcholová rovnice tenké čočky***</u>

Pro zobrazení tenkou čočkou lze tedy kromě Newtonových ohniskových rovnic používat běžnou vrcholovou zobrazovací rovnici.

(která, jak víme, platí také pro kulové zrcadlo)

(ale u kulové lámavé plochy je vrcholová rovnice poněkud komplikovanější)

4. Soustava dvou čoček

Stejným způsobem jako jsme skládali kulové plochy do optické soustavy, můžeme také skládat čočky do výsledné centrované optické soustavy a můžeme přitom využívat stejných rovnic.

Jestliže tedy vytvoříme optickou soustavu ze dvou čoček s ohniskovými vzdálenostmi f_1 a f_2 a optickým intervalem Δ , pak výsledná ohnisková vzdálenost této soustavy je:

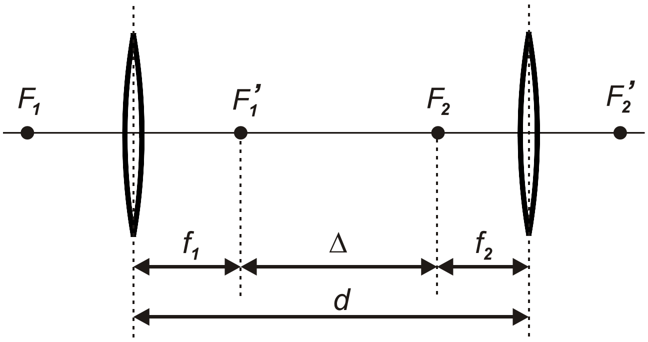
$$\boxed{f = f' = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}}$$

Ohnisková vzdálenost soustavy dvou čoček

Z tohoto vztahu je dobře vidět, že **pouhou změnou optického intervalu Δ** (může být kladný nebo záporný) lze z **libovolných čoček** ($f_1 > 0, < 0$, $f_2 > 0, < 0$) vytvořit

- jak soustavu s **kladnou** ohniskovou vzdáleností (kolektivní, $f = f' > 0$),
- tak i soustavu se **zápornou** ohniskovou vzdáleností (disperzní, $f = f' < 0$)

Situace se zjednoduší, jestliže obě čočky budou tenké, tj. hlavní a uzlové body jsou ve středu čoček):



Označíme-li vzdálenost středů čoček jako d, pak můžeme jednoduše vyjádřit optický interval

$$\Delta = d - f_1 - f_2$$

Dosadíme do vztahu pro ohniskovou vzdálenost a vypočítáme optickou mohutnost:

$$D = \frac{1}{f} = -\frac{d - f_1 - f_2}{f_1 \cdot f_2} = -\frac{d}{f_1 \cdot f_2} + \frac{f_1 + f_2}{f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$$

Vznikne tak jednoduchý vztah:

$$\boxed{D = D_1 + D_2 - d \cdot D_1 \cdot D_2}$$

Optická mohutnost soustavy dvou čoček

V případě, kdy jsou tenké čočky **těsně u sebe** (dotýkají se, $d \to 0$) se vztah maximálně zjednoduší:

$$\boxed{D = D_1 + D_2}$$

tj. optické mohutnosti obou čoček se sčítají.

Zcela speciální případ soustavy dvou čoček nastane, jestliže jejich optický interval Δ bude nulový …………….to je případ tzv. **teleskopické soustavy** (např. dalekohled)

Tato situace je stejná jako u soustavy kulových ploch – viz výše – jelikož $f, f' \to \infty$, nelze zavést ohniskové souřadnice soustavy a musí se použít rovnice pro x_2' a y_2' :

$$x_2' = \frac{f_2 \cdot f_2' \cdot x_1}{\Delta \cdot x_1 - f_1 \cdot f_1'} = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_1'} \cdot x_1 = -\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \cdot x_1$$

$$y_2' = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot y_1}{\Delta \cdot x_1 - f_1 \cdot f_1'} = -\frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 \cdot f_1'} \cdot y_1 = -\frac{f_2}{f_1} \cdot y_1$$

Doplněk: Reálné optické zobrazení

V minulých odstavcích jsme se zabývali optickým zobrazením (pomocí kulových ploch a jejich soustav), ve kterém obrazem bodu byl bod, obrazem přímky byla přímka a obrazem roviny byla rovina.

Toto **ideální optické zobrazení** však bylo odvozeno za předpokladu, že světelné paprsky neopouštějí prostor kolem optické osy – **paraxiální prostor** – a také byla zanedbána disperze světla.

Uvedené ideální podmínky jsou však v praxi velmi často porušeny a proto **reálné optické zobrazení** má vlastnosti poněkud jiné.
Jejich matematický popis je však velmi komplikovaný, proto většinou hodnotíme jen **odchylky** zobrazení danou optickou soustavou od ideálního stavu – tzv. **chyby (vady) optického zobrazení.**

Nejčastěji se zkoumají chyby při zobrazení bodového předmětu, někdy nás také zajímá zobrazení větších útvarů (úseček, ploch).

Vady zobrazení dělíme na dvě hlavní skupiny:

1) **Chyby monochromatické**
(které vznikají při zobrazování monochromatickým světlem, tj. s jedinou vlnovou délkou, jejich příčinou je **opuštění paraxiálního prostoru**)

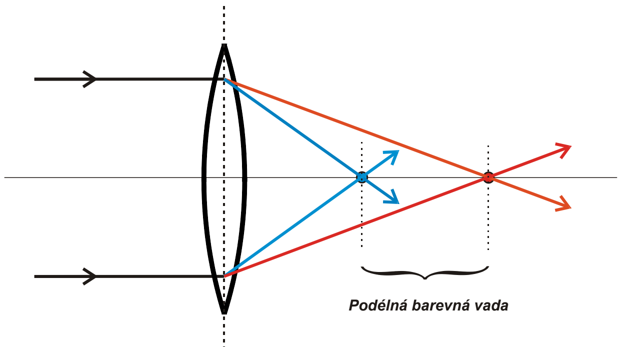
2) **Chyby chromatické**
(které vznikají při zobrazení bílým světlem, jejich příčinou je **disperze světla**)

Chromatická vada

Je důsledkem disperze světla, tj. toho, že index lomu světla závisí na vlnové délce.
Jestliže tedy při zobrazení bodového předmětu použijeme světlo složené z více vlnových délek, např. bílé světlo – pak pro každou vlnovou délku vznikne obraz v jiném místě, i když paprsky neopustí paraxiální prostor.
To platí i pro obrazové ohnisko, jehož poloha je u tenké čočky určena vztahem:

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1)\cdot\rho$$

Proto např. pro fialové světlo (větší index lomu) je větší optická mohutnost….. a ohnisko je blíže čočky než pro světlo červené



Nejjednodušší korekce toto vady se provede následovně:
Místo jedné čočky se použijí dvě tenké čočky. Jestliže se budou dotýkat, pak se jejich optické mohutnosti jednoduše sčítají:

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

Budeme pak požadovat, aby **splynuly ohniska** pro obě krajní vlnové délky světla, tj. pro červenou a fialovou (modrou) barvu – tedy např. pro Fraunhoferovy čáry C a F - jinak řečeno, aby pro tyto čáry měla soustava čoček **stejnou optickou mohutnost**:

$\boxed{D_C = D_{1F}}$ tedy : $\boxed{D_{1C} + D_{2C} = D_{1F} + D_{2F}}$

Dosadíme základní vztahy pro optickou mohutnost:

$$(n_{1C} - 1)\cdot \rho_1 + (n_{2C} - 1)\cdot \rho_2 = (n_{1F} - 1)\cdot \rho_1 + (n_{2F} - 1)\cdot \rho_2$$

Přeskupíme členy:

$$\rho_1 \cdot (n_{1C} - 1 - n_{1F} + 1)\cdot \rho_2 = ()\cdot \rho_1 + \rho_2 \cdot (n_{2F} - 1 - n_{2C} + 1)$$

a vypočítáme poměr vypuklostí čoček:

$$\boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{n_{2F} - n_{2C}}{n_{1F} - n_{1C}} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

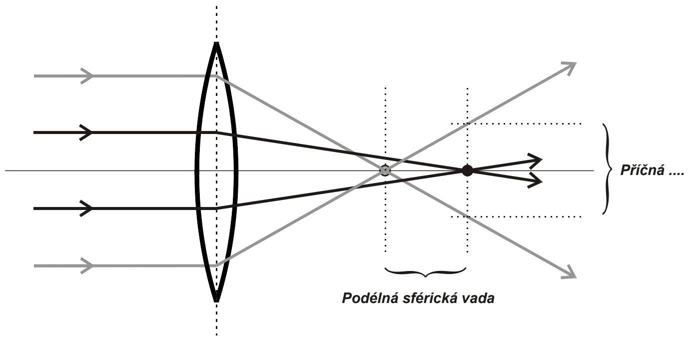
Poměr vypuklosti obou čoček tedy musí být roven poměru ***středních disperzí*** materiálů obou čoček.

Protože pravá strana je záporná, musí mít vypuklosti čoček ρ_1 a ρ_2 opačná znaménka - musíme tedy vzít **spojku a rozptylku z různých materiálů** (např. spojku z korunového skla, rozptylku z flintového skla).
………… vznikne tzv. **achromát.**

Ohniska budou totožná, ale **jen pro tyto dvě barvy**, pro ostatní barvy se budou dále lišit ! Proto můžeme požadovat korekce pro více barev, např. splynutí ohnisek pro **tři vlnové délky** (Fraunhoferovy čáry C, D, F)
....………tak vznikne **apochromát** (často objektiv mikroskopu)

Otvorová (sférická) vada

Vzniká při zobrazení na ose širokým svazkem paprsků ….paprsky dále od osy vytvoří obraz blíže čočky.



Tuto vadu lze také odstranit kombinací spojky a rozptylky.

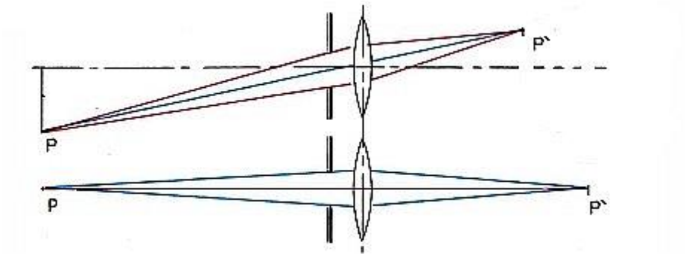
Jestliže se kromě odstranění sférické vady pro určitý bod na ose provede korekce zobrazení i pro blízké okolí tohoto body v rovině kolmé k ose (je to možné udělat pro dva body, tzv. sinová podmínka)
……………..vznikne **aplanát**

Astigmatismus

Vzniká při zobrazení bodu mimo optickou osu **úzkým** svazkem paprsků.

pohled z boku

pohled shora



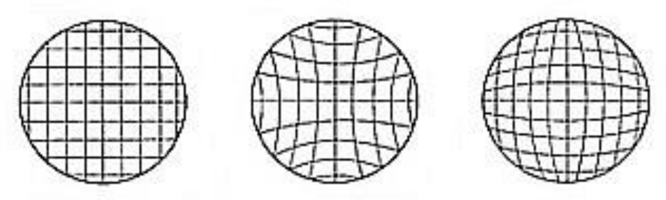
Odstraňuje se vhodnou volbou indexů lomu, poloměrů a vzdáleností lámavých ploch.
……………..vznikne **anastigmát**

Koma

Vzniká při zobrazení bodu mimo optickou osu **širokým** svazkem paprsků, je to vlastně **astigmatismus pro široké svazky**
Odstraňuje se opět kombinací čoček.

Zkreslení obrazu

Projevuje se při zobrazování celé **roviny**, kolmé k ose (důležité v geodezii): Vzniká, když se body různě vzdálené od osy zobrazují s různým zvětšením. Odstraňuje se opět kombinací čoček.



bez zkreslení **poduškovité zkreslení** **soudkovité zkreslení**

Zklenutí obrazu

Projevuje se rovněž při zobrazení **kolmé roviny** …… jejím obrazem je **zakřivená** plocha

----

konec kapitoly K. Rusňák, verze 03/2016, uprav. 04/2020