Další velmi užitečné výsledky kinetické teorie

Kinetická teorie nám umožní definovat a vypočítat další zajímavé veličiny, které jsou velmi přínosné a užitečné ve vakuové fyzice a technice :

1. Částicový déšť

Veličina ***částicový déšť*** určuje ***střední počet nárazů molekul na stěnu*** – definovaný ***za jednotku času na jednotku plochy*** .

Je to velmi užitečná, přímo základní veličina při zkoumání interakcí částic plynu s povrchy pevných látek ve vakuovém systému - ***v první řadě*** s vnitřním povrchem ohraničujích stěn (v minulé kapitole jsme už prozkoumali základní interakci částic s povrchem – pružnou srážku – a úspěšně jsme odvodili její důsledek – tlak plynu.)

Veličina ***částicový déšť*** má ***ale širší využití*** – s její pomocí můžeme stanovit počet dopadů molekul na pouze myšlenou plochu, umístěnou kdekoliv v objemu plynu a určovat tak například částicový tok touto plochou (jako počet částic prošlý danou plochou za jednotku času).

Při jejím výpočtu by principiálně bylo možné použít stejný postup, jako při výpočtu tlaku - tj. mohli bychom tuto veličinu vyjádřit jako :

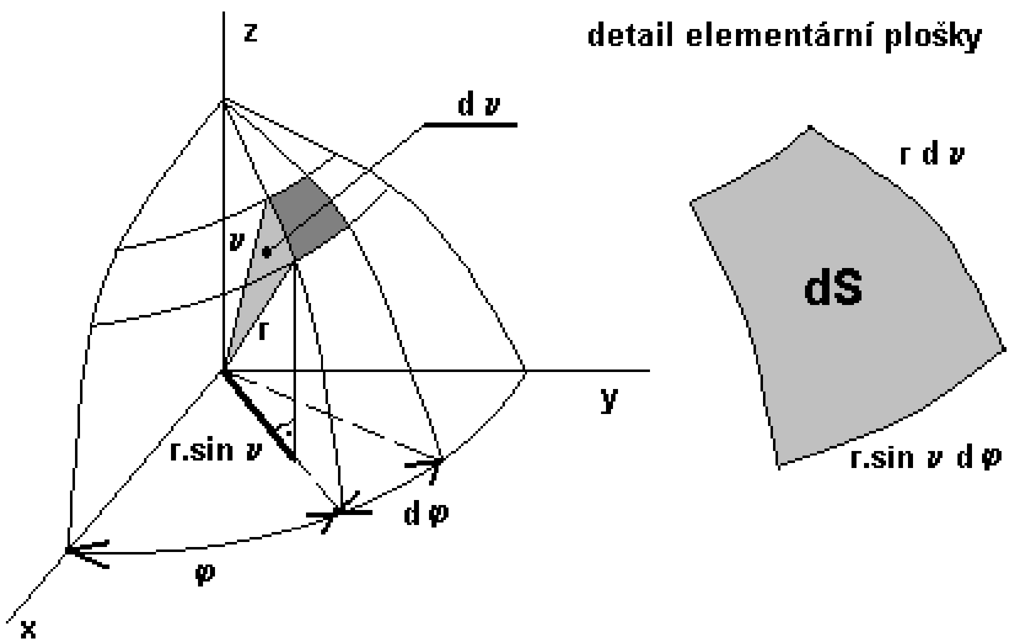
$$Z = \frac{1}{dtdS} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dN}{V} v_x dS dt.$$

Uvažte však, že tento integrál už nebude možné převést na známou střední hodnotu (obsahuje lichou funkci). Musíme proto použít jiný postup :

Využijeme skupinu molekul dN, které mají podle Maxwellova rozdělení velikost rychlosti v intervalu dv – tj. všechny tyto molekuly mají prakticky stejnou velikost rychlosti :

$$dN = f(v) \cdot dv$$

A směr vektorů jejich rychlosti vyjádříme pomocí ***sférických souřadnic*** – viz následující obrázky :



V těchto souřadnicích je směr vektoru určen dvěma úhly (ϑ,φ). Avšak – i když máme obrovský soubor molekul plynu, nemusí mít tento ***přesný směr*** ani jediná molekula (je to stejné, jako bychom zvolili určitou velikost rychlosti na ose v – také by ji nemusela mít žádná molekula).

Je tedy nutno – stejně jako na ose velikosti rychlostí – zvolit pro úhly malé, ***diferenciální intervaly***. Stanovíme tedy, aby úhly ϑ,φ ležely v zadaných (velmi malých, diferenciálních) spojitých intervalech velikosti $d\vartheta,\ d\varphi$ - tedy aby platilo :

$$\vartheta \in (\vartheta,\ \vartheta + d\vartheta)$$

$$\varphi \in (\varphi,\ \varphi + d\varphi)$$

Jak je vidět z obrázku, touto volbou vlastně zadáme (velmi malý, diferenciální) ***prostorový úhel***, ve kterém už jistě budou ležet vektory rychlostí nenulového počtu molekul :

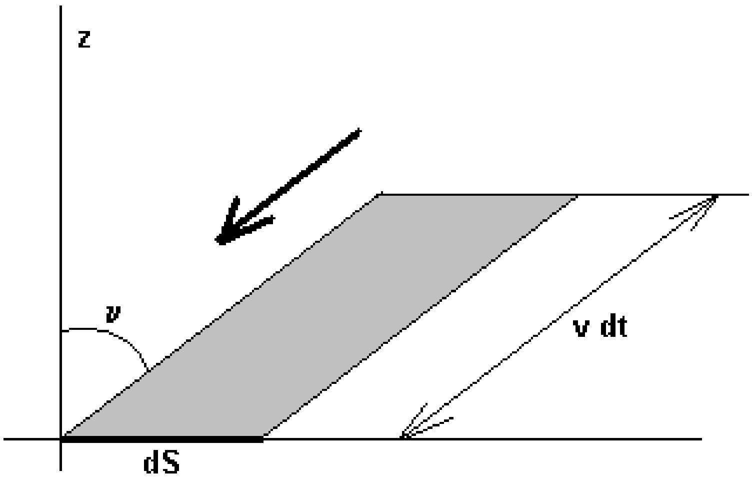
$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{r d\vartheta r \sin\vartheta d\varphi}{r^2} = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Molekuly ovšem létají do všech možných úhlů - tedy do celého prostorového úhlu 4π . Do našeho zadaného úhlu $d\omega$ pak tedy směřuje pouze úměrná část z celkového počtu molekul - daná poměrem:

$$\boxed{\frac{d\omega}{4\pi}}$$

Dále uvažme, že při ***zadaném směru*** rychlosti (ϑ,φ) mohou na plošku velikosti dS dopadnout za čas dt molekuly až z ***maximální vzdálenosti*** $v.dt$ - tedy celkem na tuto plošku dopadnou všechny molekuly ze šikmého válce o objemu:

$$dS \cdot vdt \cdot \cos\vartheta$$



A pak jen ***sečteme všechny tyto molekuly*** pro všechny možné velikosti a všechny možné směry rychlosti (odpovídající dopadům molekul na plošku dS z celého ***poloprostoru***):

$$Z = \frac{1}{dtdS} \cdot \int_{v=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{dN}{V} \cdot dS\ v\ dt\ \cos\vartheta \cdot \frac{d\omega}{4\pi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi V} \frac{N}{N} \cdot \int_0^{\infty} vf(v)dv \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \bar{v} = \frac{1}{4} n\bar{v}.$$

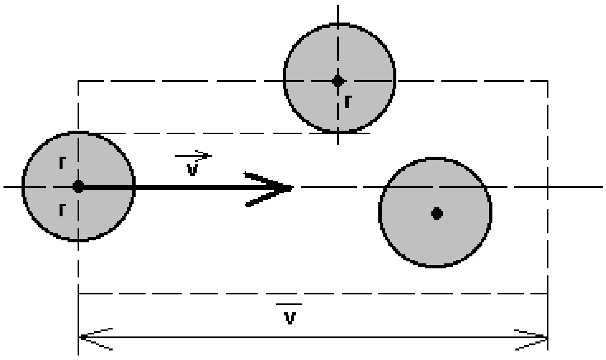
Výsledný vzorec pro ***částicový déšť*** je tedy velmi jednoduchý :

$$\boxed{Z = \frac{1}{4} \cdot n\bar{v}}$$

Počet nárazů částic za jednotku času na jednotku plochy

2. Střední volná dráha

Tato veličina charakterizuje délku ***dráhy, kterou molekula uletí mezi dvěma srážkami***. U neuspořádaného pohybu molekul jsou samozřejmě délky drah mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami různé, a proto se počítá ***střední hodnota*** těchto drah. Vztah pro střední dráhu lze odvodit z jednoduchého modelu, který ukazuje následující obrázek:



Předpokládáme pro jednoduchost, že všechny molekuly jsou v klidu a ***pouze jedna se pohybuje rychlostí*** o velikosti $\bar{v}$. Tato molekula - jako koule o poloměru r - uletí za jednotku času ***dráhu*** velikosti $\bar{v}$ a narazí přitom do všech molekul, které jsou od její dráhy ***vzdálené maximálně*** o vzdálenost $R = 2r$ ……. tedy narazí do všech molekul v objemu:

$$\pi R^2 \cdot \bar{v}$$

Počet molekul v tomto objemu vyjádříme pomocí jejich ***koncentrace*** jako :

$$n \cdot \pi R^2 \cdot \bar{v}$$

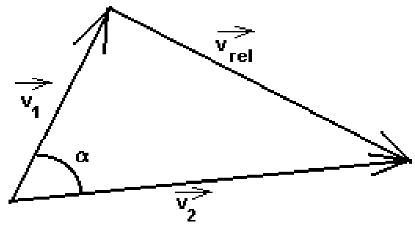
Tento počet molekul je pak roven ***počtu srážek***, ke kterým dojde ***na vzdálenosti*** $\bar{v}$. Tedy průměrná vzdálenost mezi dvěma srážkami bude jednoduše :

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{n\pi R^2 \bar{v}} = \frac{1}{n\pi R^2} = \frac{1}{n4\sigma}$$

kde jsme označili σ geometrický příčný průřez molekuly :

$$\sigma = \frac{\pi R^2}{4}$$

Ovšem předpoklad o <u>nehybnosti ostatních molekul</u> jistě není správný - je nutné ještě uvažovat <u>vzájemnou rychlost</u> mezi vybranou molekulou a ostatními molekulami - tedy její ***relativní rychlost***:



Podle obrázku určíme relativní rychlost jako rozdíl rychlostí uvažované molekuly a některé sousední molekuly :

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1;$$

Jestliže použijeme cosinovou větu :

$$v_{rel}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha$$

a uděláme formálně ***střední hodnoty*** na obou stranách, dostaneme :

$$\overline{v_{rel}^2} = \underbrace{\overline{v_1^2}}_{\overline{v^2}} + \underbrace{\overline{v_2^2}}_{\overline{v^2}} - \underbrace{\overline{2v_1 v_2 \cos\alpha}}_{0}$$

Pak uvážíme, že na pravé straně poslední člen je nulový (proč ?) a první dva členy jsou střední kvadratické rychlosti, tedy dostaneme :

$$\overline{v_{rel}^2} = 2\overline{v^2}$$

z toho pak odmocněním dostaneme jednoduše (přesné odvození ovšem není jednoduché):

$$\overline{v_{rel}} = \sqrt{2} \cdot \bar{v}$$

Po dosazení do vzorce pro střední volnou dráhu pak ***vznikne přesnější vztah***:

$$\bar{l} = \frac{1}{n4\sqrt{2}\sigma}$$

Podrobné studium molekulových srážek napohled překvapivě ukázalo, že geometrický příčný průřez molekuly σ závisí na rychlosti molekul - tj. na teplotě plynu.

Tento jev byl potvrzen při vzájemných reakcích různých částic v chemii, ve fyzice plazmatu, v jaderné fyzice - kdy původně geometrický průřez částic dostává smysl ***<u>účinného průřezu reakce</u>*** -

- určuje rychlost jejího průběhu – a není již konstantní, ale obecně ***závisí*** na různých veličinách, zejména na ***druhu reagujících částic***, na druhu jejich ***vzájemné reakce*** (interakce) a také na jejich kinetické ***energii***.

(V jaderné fyzice je obecně známá závislost účinného průřezu štěpení jádra uranu na energii dopadlého neutronu, z které plyne nutnost používání moderátoru ve štěpném reaktoru)

V našem případě výpočtu střední volné dráhy se jedná a interakci dvou ***neutrálních molekul plynu***, druhem jejich reakce je ***pružná srážka*** a závislost účinného průřezu na jejich energii je vyjádřena ***Sutherlandovým vztahem*** :

$$\sigma = \sigma_\infty \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right)$$

kde

σ_∞ je σ pro $T \to \infty$ a T_d je tzv. teplota zdvojení (pro $T = T_d$ je $\sigma = 2\sigma_\infty$)

Pak výsledný vztah pro střední volnou dráhu je:

$$\boxed{\bar{l} = \frac{1}{n4\sqrt{2}\sigma_\infty\left(1 + \frac{T_d}{T}\right)}}$$

Střední volná dráha

Dosadíme-li ještě za koncentraci n ze stavové rovnice $p = nkT$, dostaneme:

$$\boxed{\bar{l} \cdot p = \frac{kT}{4\sqrt{2}\,\sigma_\infty \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right)}}$$

Součin střední volné dráhy a tlaku

Je vidět, že součin $\bar{l}p$ je konstantní pro daný plyn a danou teplotu.

Například: N_2 $0\,^oC$: $R_\infty = 3{,}2 \cdot 10^{-10}\ m$ ($R_0 = 3{,}78 \cdot 10^{-10}\ m$)

$$T_d = 98\text{-}107\,K \ \text{(pro 90 -1000K)}$$

$$\bar{l} \cdot p = 4{,}4 \cdot 10^{-5}\ m \cdot mTorr = 5{,}9 \cdot 10^{-5}\ m \cdot mbar$$

O_2 $0\,^oC$: $R_{0°C} = 3{,}62 \cdot 10^{-10}\ m$

$$\bar{l} \cdot p = 4{,}9 \cdot 10^{-5}\ m \cdot mTorr$$

Vzduch, *20 °C* :

$$\boxed{\bar{l} \cdot p = 5 \cdot 10^{-5}\ m \cdot mTorr = 6{,}65 \cdot 10^{-5}\ m \cdot mbar}$$

3. Počet srážek (jedné) částice za jednotku času

Když použijeme základní úvahy z počátku minulého odstavce o střední volné dráze, dostaneme :

$$\boxed{z = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{n4\sigma \bar{v}}{1} = \frac{\bar{v}}{\bar{l}}}$$

4. Objemová hustota srážek

Další používanou veličinou je ***počet srážek (všech částic) v jednotce objemu za jednotku času***, též nazývanou ***objemová hustota srážek***.

Víme, že v jednotce objemu je n molekul a každá z nich absolvuje z srážek za jednotku času, celkem tedy $n \cdot z$ srážek.
Tím jsme ale každou srážku započítali dvakrát a výsledek musíme vydělit dvěma:

$$\boxed{\Delta Z = \frac{1}{2} nz = \frac{1}{2} \frac{n\bar{v}}{\bar{l}}.}$$

5. Střední vzdálenost molekul

Tato veličina se někdy počítá pro odhad vzdáleností molekul v plynu, přičemž se použije představy, že molekuly jsou ***pravidelně rozmístěny v bodech kubické mřížky***.

Jedné molekule tak přísluší jedna elementární krychle o hraně a, tedy objem a^3. Z definice hustoty pak plyne:

$$\boxed{a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}.}$$

Domácí úkol

Vypočítejte a porovnejte všechny definované veličiny pro několik tlaků v celém oboru vakua.

Stanovte také koncentraci molekul n ze stavové rovnice plynu $p = nkT$, při teplotě $20\,^{\circ}C$.

Návod k řešení : Použijte předchozí rovnice s jednoduchými úpravami :

$$p = nkT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p}{kT} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$$

$$\bar{l} \cdot p = konst. \quad \Rightarrow \quad \bar{l} = \frac{konst.}{p}$$

$$z = \frac{\bar{v}}{\bar{l}} \qquad \text{kde} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kTN_a}{\pi m N_a}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$\Delta Z = \frac{1}{2}\frac{n\bar{v}}{\bar{l}} = \frac{1}{2} nz$$

$$Z = \frac{1}{4} n\bar{v}$$

p [Pa]	p [mbar]	n [mm^{-3}]	a [mm]	$\bar{l}$ [m]	z [s^{-1}]	ΔZ [s^{-1}mm^{-3}]	Z [s^{-1}mm^{-2}]
10^5	10^3	$2{,}5 \cdot 10^{16}$	$3{,}4 \cdot 10^{-6}$	$6{,}65 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^9$	$8{,}8 \cdot 10^{25}$	$2{,}9 \cdot 10^{21}$
10^2	10^0	$2{,}5 \cdot 10^{13}$	$3{,}4 \cdot 10^{-5}$	$6{,}65 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^6$	$8{,}8 \cdot 10^{19}$	$2{,}9 \cdot 10^{18}$
10^{-1}	10^{-3}	$2{,}5 \cdot 10^{10}$	$3{,}4 \cdot 10^{-4}$	$6{,}65 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^3$	$8{,}8 \cdot 10^{13}$	$2{,}9 \cdot 10^{15}$
10^{-5}	10^{-7}	$2{,}5 \cdot 10^6$	$7{,}4 \cdot 10^{-3}$	665	0,7	$8{,}8 \cdot 10^5$	$2{,}9 \cdot 10^{11}$
10^{-11}	10^{-13}	2,5	0,74	$665 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^{-7}$	$8{,}8 \cdot 10^{-7}$	$2{,}9 \cdot 10^5$

Podrobně prozkoumejte hodnoty v tabulce a jejich intervaly.

Nalezněte zajímavé souvislosti.

Které veličiny jsou asi nejdůležitější, v jakých situacích ?