Část II.

Elektřina a magnetismus

Sekce 2.

Statické pole

A.D. Pajdarová (ZČU)
KFY/FYSV (23/24)

Elektrostatické pole

Charakterizace elektrostatického pole

- ***Elektrostatické pole*** je vytvářeno objekty s el. nábojem, které jsou nehybné vůči vztažné soustavě.
- Mag. náboje nebyly nalezeny, proto v elektřině a magnetismu může být statickým pouze pole elektrické.
- Protože se náboje nepohybují, bude $\boldsymbol{J} = \mathbf{0}$. Protože zároveň platí, že $\rho \neq \rho(t)$, nemůže existovat magnetické pole (viz I. MR), tj. $\boldsymbol{H} = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$. V el.-stat. poli se proto první čtyři MR redukují jen na Gaussův zákon, tj.

$$\boxed{\oint_{S(V)} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \, \mathrm{d}V,} \tag{II.2.1}$$

Maxwellovy rovnice I–III mají nulovou pravou stranu.

Coulombův zákon

Formulace Coulombova zákona

- C-zákon je základním poznatkem o silách vzájemného působení objektů s el. nábojem. Matematicky lze C-zákon zapsat ve tvaru:

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{r}_{12}^{\circ},} \qquad \text{(II.2.2)}$$

kde $\boldsymbol{F}_{12}$ je el. síla, kterou na náboj Q_2 působí náboj Q_1, a $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ je vzájemný polohový vektor mezi el. náboji Q_1 a Q_2. Platí, že $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$.

- Slovně: ***Dva el. nabité objekty zanedbatelných rozměrů (BN) působí na sebe vzájemně prostřednictvím el. polí silami, které jsou úměrné součinu jejich el. nábojů a nepřímo úměrné druhé mocnině jejich vzájemné vzdálenosti.***
- Coulombův zákon lze odvodit z Maxwellových rovnic.

Coulombův zákon

Intenzita a indukce el. pole BN

- Jelikož dle VIII. MR je $\boldsymbol{F}_{12} = Q_2\boldsymbol{E}_1$, kde $\boldsymbol{E}_1$ je el. intenzita vytvářená nábojem Q_1 v místě náboje Q_2, bude intenzita el. pole tvořená bodovým nábojem Q_1 rovna:

$$\boxed{\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{r_{12}^2}\boldsymbol{r}_{12}^{\circ}.} \qquad \text{(II.2.3)}$$

- Využijeme-li V. MR $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon\boldsymbol{E}_1$, získáme pro indukci el. pole tvořeného bodovým nábojem Q_1 výraz:

$$\boxed{\boldsymbol{D}_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_1}{r_{12}^2}\boldsymbol{r}_{12}^{\circ}.} \qquad \text{(II.2.4)}$$

- Pro intenzity a indukce el. pole platí princip superpozice.

Coulombův zákon

El. pole více el. nábojů

• El. nabitá tělesa lze považovat za soubor n bod. nábojů, tj. výsledné el. pole v místě s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_X$ bude dáno dle principu superpozice vztahem

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_{iX}^2} \boldsymbol{r}_{iX}^{\circ},$$

kde $\boldsymbol{r}_{iX} = \boldsymbol{r}_X - \boldsymbol{r}_i$ je vzájemný polohový vektor mezi i-tým el. nábojem Q_i a bodem X. Je-li dána obj. hustota náboje $\rho(\boldsymbol{r})$, lze součin $\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V$ považovat za bod. náboj a součet nahradit integrací, pak

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V}{r_r^2} \boldsymbol{r}_r^{\circ},} \qquad \text{(II.2.5)}$$

kde $\boldsymbol{r}_r = \boldsymbol{r}_X - \boldsymbol{r}$.

Elektrický potenciál

Proč el. potenciál?

• Řešení el.-stat. polí pomocí vektorů intenzity a indukce je komplikované. Existuje skalární veličina, která by el.-stat. pole popsala?

• Použijeme-li analogii s gravitačním polem, mohli bychom vzít potenciální energii W_p. Nejprve je však nutné stanovit, kde bude potenciální energie nulová.

• Jelikož $\boldsymbol{E}$ je pro všechna tělesa ve velkých vzdálenostech téměř nulová (viz závislost $\boldsymbol{E}$ na $1/r^2$ pro BN a všechna tělesa lze považovat za BN, jsme-li od nich dostatečně daleko), můžeme položit, že $W_\mathrm{p}(\infty) = 0$.

Elektrický potenciál

Potenciální energie v el.-stat. poli

~ dána prací vykonanou vnější silou $\boldsymbol{F}^{\rm ex}$ při přesunutí el. náboje z nekonečna do místa $\boldsymbol{r}_X$, tj.

$$A_X^{\rm ex} = \int_{\infty}^{\boldsymbol{r}_X} \boldsymbol{F}^{\rm ex} \cdot {\rm d}\boldsymbol{r} = W_{\rm p}(\boldsymbol{r}_X) - W_{\rm p}(\infty) = W_{\rm p}(\boldsymbol{r}_X).$$

• Jelikož $\boldsymbol{F}^{\rm ex} = -\boldsymbol{F}$, kde $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ je vektor síly el.-stat. pole, bude potenciální energie el.-stat. pole v místě $\boldsymbol{r}_X$ rovna

$$\boxed{W_{\rm p}(\boldsymbol{r}_X) = Q \int_{\boldsymbol{r}_X}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot {\rm d}\boldsymbol{r}, \quad [W_{\rm p}] = {\rm J}.} \qquad \text{(II.2.6)}$$

• Pro jednoduchý popis el.-stat. pole nevhodné, protože závisí na velikosti náboje.

Elektrický potenciál

Elektrický potenciál $\varphi(\boldsymbol{r})$

• Podělme proto pot. energii velikostí náboje (tj. $W_{\rm p}/Q$) a vzniklou veličinu nazvěme ***elektrický potenciál*** φ. Pak bude

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{r}_X) = \int_{\boldsymbol{r}_X}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot {\rm d}\boldsymbol{r}, \quad [\varphi] = {\rm V}\ ({\rm volt}) = {\rm m^2\,kg\,s^{-3}\,A^{-1}}.} \qquad \text{(II.2.7)}$$

• Slovně: ***Potenciál el.-stat. pole je číselně roven práci, kterou vykonají síly el.-stat. pole při přenesení jednotkového náboje z daného místa pole do místa s nulovou pot. energií (nejčastěji nekonečno).***

Elektrický potenciál

Elektrické napětí U

- Práce el. pole při přenesení BN Q z místa $\boldsymbol{r}_1$ do místa $\boldsymbol{r}_2$ bude

$$A_{12} = Q \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = Q \left(\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\infty}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right) = Q(\varphi(\boldsymbol{r}_1) - \varphi(\boldsymbol{r}_2)).$$

- Zavedeme ***elektrické napětí*** U jako práci na jednotkový BN (A_{12}/Q):

$$\boxed{U_{12} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{r}_1) - \varphi(\boldsymbol{r}_2) = -\Delta\varphi, \quad [U_{12}] = \mathrm{V}.} \tag{II.2.8}$$

- Slovně: ***El. napětí mezi dvěma body v prostoru X a Y je číselně rovno práci, kterou vykonají síly el.-stat. pole při přemístění jednotkového bod. náboje z místa X do místa Y.***

Elektrický potenciál

Vztah mezi $\boldsymbol{E}$ a φ

- Mezi intenzitou el. pole $\boldsymbol{E}$ a potenciálem el.-stat. pole φ platí vztah:

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi.} \tag{II.2.9}$$

- Jelikož $\varphi' = \varphi + C$, kde C je libovolná konstanta, popisuje stejné el.-stat. pole jako φ, není el. potenciál určen jednoznačně. El. potenciál je nutné ***kalibrovat***, tj. určit jeho hodnotu v jistém místě prostoru (nejčastěji $\varphi(\infty) = 0$). Poté jsou hodnoty el. potenciálu v ostatních bodech prostoru stanoveny relativně vůči místu $\varphi = 0$.
- El. potenciál musí být zaveden jednoznačně, tj. musí mít v daném místě jen jednu hodnotu. Výraz $\int_{\boldsymbol{r}_X}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ nesmí záviset na integrační cestě. Tudíž v el.-stat. musí platit, že $\oint_c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$, tj. el.-stat. pole je ***pole nevírové***.
- Pro el. potenciál platí princip superpozice.

Elektrický potenciál

Potenciál bodového náboje

- Pro el. potenciál BN velikosti Q platí:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r},} \tag{II.2.10}$$

kde r je vzdálenost od BN. Předpokladem je, že $\varphi = 0$ v nekonečné vzdálenosti od BN.

Ekvipotenciální plochy, ekvipotenciály

- ***Ekvipotenciální plochu*** tvoří ta místa v prostoru, kde el. potenciál nabývá stejné hodnoty, tj. $\varphi = C$, kde C je konstanta.
- ***Ekvipotenciála*** je křivka, která vznikne průnikem nárysny a ekvipot. plochy.
- Vektor $\boldsymbol{E}$ je vždy kolmý k ekvipot. ploše, protože na ekvipot. ploše je $\mathrm{d}\varphi = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ pro všechna $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{E}$.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Podmínka pro $\boldsymbol{E}$ ve vodiči

- V celém objemu vodiče platí, že

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}.} \tag{II.2.11}$$

Pokud by tato podmínka neplatila, vytvořil by se ve vodiči el. proud, který by velmi rychle přeskupil volný el. náboj ve vodiči tak, aby $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$.

- Jelikož $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = \boldsymbol{0}$, tj. $\varphi = \text{konst.}$, povrch vodiče tvoří ekvipotenciální plochu a vektor $\boldsymbol{E}$ je všude kolmý k povrchu vodiče.
- El. náboj přivedený na povrch vodiče je uložen na jeho povrchu v podobě plošného náboje o hustotě σ. Pro velikost $\boldsymbol{E}$ pak platí

$$E = \sigma/\varepsilon,$$

kde ε je permitivita okolí vodiče.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Vliv tvaru vodiče

• Plošná hustota el. náboje σ na povrchu vodiče závisí jen na jeho tvaru a je tím větší, čím větší je křivost povrchu vodiče (rovna $1/R$, kde R je poloměr křivosti). Pro kouli platí:

$$\sigma = \varepsilon E = \varepsilon \frac{\varphi}{R} \tag{II.2.12}$$

• σ a E jsou největší na hrotech ($1/R$ je velké). Může tam docházet k sršení elektřiny (ionizace molekul O_2 a odpuzování od hrotu).

Elektrostatická indukce

• Přiblížíme-li k vodiči elektricky nabité těleso, dojde k přeskupení el. náboje vodiče tak, aby platila podmínka $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ v jeho objemu. Díky tomu se na povrchu vodiče, který je bližší k nabitému tělesu, objeví plošný náboj s opačným znaménkem, než je náboj nabitého tělesa. Na vzdálenějším povrchu vodiče se objeví plošný náboj se znaménkem shodným s nabitým tělesem. Náboj na povrchu vodiče lze z vodiče odvést.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Dielektrická pevnost

• Dielektrika mají málo volných elektronů (jsou to nevodiče). Pokud je však vnější el. pole silné, může tyto elektrony v dielektriku urychlit. Urychlené elektrony poté mohou ionizovat (uvolňovat další elektrony) z molekul tvořících dielektrikum. Tyto uvolněné elektrony jsou též el. polem urychlovány. Počet volných elektronů tak narůstá, až může dojít k ***průrazu dielektrika***, kdy se z dielektrika stává de facto vodič. Velikost intenzity el. pole, při které dochází k průrazu dielektrika se nazývá ***dielektrická pevnost***.

Polarizace dielektrika (1/2)

• Při vložení dielektrika do vnějšího el. pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_0$ dojde k mírnému posuvu těžiště kladných a záporných el. nábojů v molekulách dielektrika. Z molekul se stanou el. dipóly s orientací opačnou než $\boldsymbol{E}_0$, v jeho objemu se tak vytvoří opačné ***polarizační pole*** o intenzitě $\boldsymbol{E}_\mathrm{p}$. To zeslabuje vnější el. pole $\boldsymbol{E}_0$.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Polarizace dielektrika (2/2)

- Výsledné el. pole v dielektriku je

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_\mathrm{p}.$$

- Polarizační pole je dáno výrazem

$$\boxed{\boldsymbol{E}_\mathrm{p} = -\kappa_\mathrm{e}\boldsymbol{E},} \tag{II.2.13}$$

kde

$$\boxed{\kappa_\mathrm{e} = \varepsilon_\mathrm{r} - 1} \tag{II.2.14}$$

je ***elektrická susceptibilita*** charakterizující polarizovatelnost dielektrika.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Typy polarizací

- ***Atomová (elektronová) deformační polarizace*** – vzniká vzájemným posunem těžišť kladných el. nábojů (jader) a záporných el. nábojů (obal); velmi rychlá; doba ustavení v řádech $10^{-15} \div 10^{-14}$ s
- ***Iontová deformační polarizace*** – vzniká protažením či zkrácením vazeb v iontových molekulách (např. NaCl); doba ustavení v řádech $10^{-13} \div 10^{-12}$ s
- ***Orientační polarizace*** – vzniká stáčením polárních molekul (např. H_2O) ve vnějším el. poli, pokud to vazby molekulám dovolují; nejpomalejší; doba ustavení řádově 10^{-8} s
- Obě deformační polarizace rostou úměrně s intenzitou el. pole; orientační polarizace roste lineárně jen zpočátku, poté se asymptoticky blíží maximální hodnotě

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Feroelektrika

~ látka schopná udržet si vlastní elektrické pole i bez vnějšího elektrického pole; mají velmi vysoké κ_{e} (až tisíce)

- Často vznikají tak, že látka je převedena do tekutého stavu a ztuhne v přítomnosti silného el. pole. Tím si zachová el. polarizaci.

Elektrostrikční a piezoelektrický jev

- ***Elektrostrikční jev*** – zkrácení rozměru materiálu v důsledku polarizace ve vnějším el. poli
- ***Piezoelektrický jev*** – vytvoření vázaného náboje na materiálu v důsledku působící mechanické síly (v tlaku či tahu)
- Využívá se jich u generátorů a detektorů ultrazvuku.

Elektrická kapacita

Vlastní kapacita

- Po úpravě (II.2.12) získáme, že

$$\frac{Q}{\varphi} = \varepsilon \frac{S}{R}.$$

To znamená, že poměr Q/φ je pro kulový vodič závislý pouze na geometrii a prostředí. Podobně to je i pro jiné tvary vodičů. Zavádíme proto ***vlastní kapacitu vodiče*** výrazem

$$\boxed{C_{\mathrm{vl}} = \frac{Q}{\varphi}, \quad [C] = \mathrm{F(farad)} = \mathrm{m^{-2}kg^{-1}s^{4}A^{2}},} \tag{II.2.15}$$

kde Q náboj vodiče a φ je el. potenciál, který vodič získá po nabití nábojem Q.

Elektrická kapacita

Kondenzátor

• Umístíme-li do blízkosti kladně nabitého vodiče vodič záporně nabitý, dojde k poklesu potenciálu kladného vodiče a zvýšení potenciálu vodiče kladného. V obou případech dojde ke zvýšení poměrů Q/φ, tj. kapacity obou vodičů.

• Systém dvou vodičů, které uzavírají el. pole mezi sebe, tj. kde celý el. indukční tok jednoho končí na druhém, nazýváme ***kondenzátor***. Pro kapacitu kondenzátoru platí

$$\boxed{C = \frac{Q}{U},} \tag{II.2.16}$$

kde Q je náboj kladného vodiče a U je el. napětí mezi kladným a záporným vodičem.

Elektrická kapacita

Deskový kondenzátor

• je tvořen dvěma vodivými rovinami o plochách S, jejichž vzdálenost l je výrazně menší než charakteristický rozměr desek a u nichž je prostor mezi nimi vyplněn dielektrikem o permitivitě ε. Jeho kapacita je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \varepsilon\frac{S}{l}.} \tag{II.2.17}$$

Hustota energie el. pole

• Při vzniku el. pole v jistém objemu prostoru V je nutné vykonat práci W_e, která se uloží v podobě energie el. pole s objemovou hustotu

$$\boxed{w_\mathrm{e} = \frac{\mathrm{d}W_\mathrm{e}}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}, \quad [w_\mathrm{e}] = \mathrm{J\,m^{-3}}.} \tag{II.2.18}$$